接続の微分幾何とゲージ理論

カリフォルニア大学教授　Ph.D.

小　林　昭　七　著

東京　裳　華　房　発行

Differential Geometry of Connections and Gauge Theory

by

Shoshichi Kobayashi

SHOKABO
TOKYO

序　　文

ファイバー束とその接続の概念は Elie Cartan が晩年に発表した一連の論文に始まる. Ehresmann によるファイバー束と接続の現代的定義は Cartan の仕事の基礎をかためるためであった. 振りかえると 37 年も昔のことになるが, 矢野健太郎先生がその昔, 手で写し書きされた Cartan の論文を貸して頂いて勉強した頃は, 接続の理論に興味をもつのは微分幾何を専門とする数学者に限られていた. 1950 年代になって S-S. Chern の講義録, 野水克己氏の "Lie Groups and Differential Geometry", 1960 年代に入って野水氏と小生の "Foundations of Differential Geometry" が出版されたが, 1970 年代終りになり, はじめて急激に高まってきた接続に対する広い関心は物理学におけるゲージ理論に負うところが大きい. それは, 1920 年代に高次元リーマン幾何に対する関心が高まった大きな理由が 1915 年に発表されたアインシュタインの一般相対性理論にあったのを思い起こさせる. ゲージ理論が純粋数学としてさらに発展し, 1980 年代に入って, 特に Donaldson により 4 次元トポロジーに応用されるにおよんで多様体の研究に必須のものとなった. また近年, 正則ベクトル束の研究においてもゲージ理論的手法が用いられるようになり, 接続の理論の有用性はさらに拡がった.

このような事情を踏まえて, 1984 年初夏に小畠守生教授のお計らいにより慶応大学で接続の理論の入門的講義を数回行う機会に恵まれた. また, 1987 年秋にはバークレーで接続とゲージ理論の講義をしたが, この本はそれらの講義を基にしたものである. バークレーでの講義の目標を多様体の基礎的なことを勉強した学生が Atiyah, Hitchin および Singer の論文 "Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry" を理解できるようにな

ることにおいた．もちろん Hodge の理論と Atiyah - Singer の指数定理は説明するだけで証明まで与えることは不可能であるが，この本を読むにはそれで差支えないように書いたつもりである．

また数は多くないが，節の終りにつけた問題は実際に演習問題として宿題に出したものが大部分である．経験から，あまり易しいとは思えないので巻末に解答をつけた．

すでに何か一冊多様体の入門書を勉強された読者は第 1 章はとばして第 2 章から読みはじめても大丈夫であろう．

最後に，この本の執筆をおすすめ下さった恩師 矢野健太郎先生と校正等でお世話になった裳華房の細木周治氏に感謝したい．

1989年　春

バークレーにて

小　林　昭　七

目　次

1 多　様　体

§ 1.　ベクトル束・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2
§ 2.　微分形式・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・8
§ 3.　微分形式の積分・・・・・・・・・・・・・・・・・12
§ 4.　Poincaré の補題・・・・・・・・・・・・・・・・16
§ 5.　de Rham コホモロジー・・・・・・・・・・・・・・19
§ 6.　テンソルと Lie 微分・・・・・・・・・・・・・・27

2 接　続

§ 1.　ベクトル束の接続・・・・・・・・・・・・・・・・36
§ 2.　ベクトル束の曲率・・・・・・・・・・・・・・・・42
§ 3.　内積をもったベクトル束・・・・・・・・・・・・・47
§ 4.　主ファイバー束・・・・・・・・・・・・・・・・・50
§ 5.　主ファイバー束の接続・・・・・・・・・・・・・・56
§ 6.　主ファイバー束の接続（水平部分空間の方法）・・・・64
§ 7.　主束の接続からベクトル束の接続へ・・・・・・・・68
§ 8.　平行移動とホロノミー・・・・・・・・・・・・・・71
§ 9.　アフィン接続・・・・・・・・・・・・・・・・・・76
§10.　テンソル場の共変微分・・・・・・・・・・・・・・84
§11.　アフィン接続の測地線・・・・・・・・・・・・・・88

3 リーマン幾何

§ 1. 部分多様体 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・92
§ 2. 部分多様体の接続 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・95
§ 3. 部分多様体の接続（動標構の方法）・・・・・・・・100
§ 4. リーマン多様体の接続・・・・・・・・・・・・・・・・103
§ 5. 共形変換・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・112
§ 6. 定曲率の空間・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・117
§ 7. 調和積分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・121

4 特性類

§ 1. 複素ベクトル束・・・・・・・・・・・・・・・・・・・130
§ 2. Chern 類 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・134
§ 3. 複素直線束の Chern 類 ・・・・・・・・・・・・・・143
§ 4. Chern 指標・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・146
§ 5. Pontrjagin 類 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・150
§ 6. Euler 類 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・154
§ 7. 特性類の一般論・・・・・・・・・・・・・・・・・・・157
§ 8. 葉層構造と特性類・・・・・・・・・・・・・・・・・・163

5 Yang–Mills の接続

§ 1. 接続の集合・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・170
§ 2. ゲージ変換群・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・173
§ 3. 接続の空間に作用するゲージ変換群・・・・・・・・176

§ 4.　Yang–Mills の方程式 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 181
§ 5.　弱安定な Yang–Mills 接続 · · · · · · · · · · · · · · · 188

6　4 次元多様体上の Yang–Mills 接続

§ 1.　2 次微分形式の分解 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 194
§ 2.　自己双対な共形構造 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 198
§ 3.　(反)自己双対接続 · 202
§ 4.　モジュライ空間 · 207
§ 5.　S^4 上の自己双対接続 · · · · · · · · · · · · · · · · · 225

問題の解答 · 231
参考書 · 249
索　引 · 251

1 多様体

この章では，次章以下で必要とする多様体に関する事項を復習の意味でまとめた．特に微分形式については詳しく述べてある．de Rham の定理の証明は A. Weil の論文に従った．微分形式の層を使うだけなので，層の一般論も層という言葉も導入しないことにした．邦書では［村上］にも de Rham の定理は論じてある．

多様体に関する本を一冊すでにきちんと勉強された読者は，この章はとばしても差支えない．

§1.　ベクトル束

多様体に関しては，入門書も数多くあるので，基礎的なことは既知とする．M を n 次元多様体とし，その点 p での**接空間** (tangent space) を T_pM，その双対空間，すなわち，**共変接空間** (cotangent space) を $T_p{}^*M$ と書く．$(x^1, \cdots, x^n)$ が M の局所座標系ならば，その座標近傍内の各点 p で $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ が T_pM の基となり，$(dx^1, \cdots, dx^n)$ は $T_p{}^*M$ の双対な基となる．

接空間を全部集めて，$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ と定義すると，TM には自然に $2n$ 次元多様体の構造が入る．実際，$X \in T_pM$ を

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

と書いたとき，X の座標を $(x^1(p), \cdots, x^n(p), a^1, \cdots, a^n)$ とすることにより，TM に局所座標系を導入することができる．同様に $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p{}^*M$ も $2n$ 次元多様体になる．TM も T^*M も共に**ベクトル束** (vector bundle) の例である．

一般に，多様体 M 上のベクトル束 E とは，

（i） まず，E も多様体であり，

（ii） E から M の上への（微分可能）写像 π があり，

（iii） 各点 $x \in M$ に対し，$E_x = \pi^{-1}(x)$（x 上の**ファイバー** (fiber) と呼ぶ）は一定次元（例えば r 次元）のベクトル空間で，

（iv） E は，次の意味で，局所的に M とファイバーの直積である．すなわち，各点 $x \in M$ に対し，近傍 U があり，$\pi^{-1}(U)$ と $U \times \boldsymbol{R}^r$ の間に微分同相写像

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \boldsymbol{R}^r \tag{1.1}$$

が存在して，$\varphi(y) : E_y = \pi^{-1}(y) \longrightarrow \{y\} \times \boldsymbol{R}^r \approx \boldsymbol{R}^r$ はベクトル空間としての同型写像になっている．

すぐわかるように，TM も T^*M もファイバーの次元 n のベクトル束である．それぞれ，**接ベクトル束** (tangent bundle)，**共変接ベクトル束** (cotangent bundle) と呼ぶ．つまらないベクトル束の例としては，**直積束** (product bundle) $E = M \times \boldsymbol{R}^r$ がある．

ベクトル束の定義により，M は近傍系 $\{U_\alpha\}$ で覆われ，各 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ は，$U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r$ と同型であり，各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対しては，同型写像が二つ

$$(1.2) \qquad \varphi_\alpha(x) : E_x \longrightarrow \boldsymbol{R}^r, \qquad \varphi_\beta(x) : E_x \longrightarrow \boldsymbol{R}^r$$

ある．したがって

$$(1.3) \qquad \psi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(x) \circ \varphi_\beta(x)^{-1} : \boldsymbol{R}^r \longrightarrow \boldsymbol{R}^r$$

とおいて，写像

$$(1.4) \qquad \psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r\,;\boldsymbol{R})$$

を定義する．この写像の族 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を被覆 $\{U_\alpha\}$ に対する E の **変換関数** (transition functions) と呼ぶ．変換関数が次の性質をもつことは明らかである．

$$(1.5) \qquad \psi_{\alpha\beta}(x) \circ \psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x), \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

また，$\psi_{\alpha\alpha}(x) = I_r$ かつ $\psi_{\beta\alpha}(x) = \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1}$ となることも $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ の定義からすぐにわかるが，これらのことは (1.5) で $\alpha = \beta = \gamma$，または $\alpha = \gamma$ とおくことによっても得られる．

逆に，M の被覆 $\{U_\alpha\}$ と写像 $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r\,;\boldsymbol{R})$ が与えられ，(1.5) が満たされているならば，$\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数にもつベクトル束 E がつくれる．それには，直積ファイバー束 $U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r$ の**直和** (disjoint union) $\coprod_\alpha (U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r)$ を考え，その中に同値関係を次のように定義する．

$$(x, \xi) \in U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r \quad \text{と} \quad (y, \eta) \in U_\beta \times \boldsymbol{R}^r \quad \text{は}$$

$$x = y \quad \text{そして} \quad \xi = \psi_{\alpha\beta}(x)\eta$$

のときに同値ときめる．この同値関係によって $\coprod_\alpha (U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r)$ からつくられる商空間が E である．関数 $\psi_{\alpha\beta}$ は $U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r$ と $U_\beta \times \boldsymbol{R}^r$ を共通部分 $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \boldsymbol{R}^r$ で張り合わせるときの合わせ方をきめる．

以上のことを，接ベクトル束 TM の場合にあてはめてみる．U_α を座標近傍，$(x^1, \cdots, x^n)$ をその局所座標系，同様に U_β 内の局所座標系を $(y^1, \cdots, y^n)$ とする．いま $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ での接ベクトル X を

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum b^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{1.6}$$

と二通りに表わしてみる．$\varphi_\alpha(X) = (a^1, \cdots, a^n) \in \boldsymbol{R}^n$，また $\varphi_\beta(X) = (b^1, \cdots, b^n) \in \boldsymbol{R}^n$ であるから，

$$\psi_{\alpha\beta}(p)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\,. \tag{1.7}$$

ただし，ここで，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $(a^1, \cdots, a^n)$，$(b^1, \cdots, b^n)$ を縦ベクトルとして書いたものである．(1.6) から，

$$\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum b^j \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum b^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}\,,$$

したがって，

$$a^i = \sum \frac{\partial x^i}{\partial y^j} b^j \tag{1.8}$$

となるから，$\psi_{\alpha\beta}$ は座標変換のヤコビアン $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_{i,j=1,\cdots,n}$ にほかならない．

ベクトル束 E においては，M の各点 x に，ベクトル空間 $E_x \approx \boldsymbol{R}^r$ がついていると考える．各ファイバー E_x から一つ元をえらび出したものを E の**切断** (section) と呼ぶ．すなわち，切断とは，写像 $\sigma : M \to E$ であって，

$$\pi \circ \sigma(x) = x\,, \qquad x \in M \tag{1.9}$$

となるものである．通常，σ は微分可能であると仮定する．各 $x \in M$ に対し，E_x の原点 0_x を対応させる切断を**ゼロ切断** (zero section) と呼ぶ．

接ベクトル束 TM の場合には，切断とは，**接ベクトル場** (tangent vector field) のことにほかならない．共変接ベクトル束 T^*M の切断は，**1 次微分形式** (differential 1-form) と呼ばれる．局所的には $dx^1, \cdots, dx^n$ が T^*M の基をなすから，1 次微分形式 ω は

$$\omega = \sum f_i\, dx^i \tag{1.10}$$

の形をしている．ここで $f_1, \cdots, f_n$ は局所的に定義された関数である．

Eが直積ベクトル束 $M\times \boldsymbol{R}^r$ の場合には，切断 $\sigma: M\to M\times \boldsymbol{R}^r$ は $x\mapsto (x,f(x))$，（ここで $f(x)\in \boldsymbol{R}^r$），と書けるから，$\boldsymbol{R}^r$ に値をとる関数 $f: M\to \boldsymbol{R}^r$ にほかならない．特に，$\boldsymbol{R}^r$ の基 $e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,e_r=(0,\cdots,0,1)$ に対応して $E=M\times \boldsymbol{R}^r$ の切断 $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ が得られるが，これらは M の各点で一次独立である．すなわち，各点 $x\in M$ で，$\sigma_1(x),\cdots,\sigma_r(x)$ はファイバー $E_x=\pi^{-1}(x)$ の基になる．

逆に，M のベクトル束 E に対し，切断 $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ が存在して M の各点 x で $\sigma_1(x),\cdots,\sigma_r(x)$ がファイバー $E_x=\pi^{-1}(x)$ の基となるならば，E は直積ベクトル束 $M\times \boldsymbol{R}^r$ に同型である．

任意のベクトル束 E は，局所的には直積ベクトル束に同型である．M の各点に対し近傍 U が存在して，$\pi^{-1}(U)\approx U\times \boldsymbol{R}^r$，すなわち，$U$ 上で E の切断 $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ が存在して，U の各点 x で $\sigma_1(x),\cdots,\sigma_r(x)$ がファイバー $E_x=\pi^{-1}(x)$ の基となる．

二つのベクトル束 (E,π,M)，(E',π',M) において，E' が E の部分多様体で，$\pi'=\pi|_{E'}$，そして各 $x\in M$ に対し $\pi'^{-1}(x)$ が $\pi^{-1}(x)$ の部分ベクトル空間であるとき，E' を E の **部分ベクトル束** (vector subbundle) と呼ぶ．そのとき，**商ベクトル束** (quotient vector bundle) E/E' が定義される．局所的に E の切断 $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ を $\sigma_1(x),\cdots,\sigma_s(x)$ が $\pi'^{-1}(x)$ の基となるようにえらぶことにより，E の変換関数 $\psi_{\alpha\beta}$ は

(1.11) $$\psi_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\psi'_{\alpha\beta} & * \\ 0 & \psi''_{\alpha\beta}\end{pmatrix}$$

の形になる．そして $\{\psi'_{\alpha\beta}\}$ が E' の変換関数，$\{\psi''_{\alpha\beta}\}$ が E/E' の変換関数である．

ベクトル束 E に内積 g を一つとる．すなわち，各点 $x\in M$ のファイバー $E_x=\pi^{-1}(x)$ に内積 $g_x: E_x\times E_x\to \boldsymbol{R}$ が与えられていて，g_x は x に関して微分可能とする．そのとき，部分ベクトル束 $E'\subset E$ に対し，直交部分ベク

トル束 $E'^{\perp}$ が定義される．上でえらんだ局所切断 $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ に Gram–Schmidt の正規直交化の方法を適用することにより，$\sigma_1, \cdots, \sigma_s$ が E' の局所基，$\sigma_{s+1}, \cdots, \sigma_r$ が $E'^{\perp}$ の局所基となるようにできる．そうすると，E の変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ は

$$\psi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \psi'_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \psi''_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

の形になる．商ベクトル束 E/E' は $E'^{\perp}$ に同型となる．

一般に，ベクトル空間 V, V' 等が与えられたとき，直和 $V \oplus V'$，テンソル積 $V \otimes V'$，双対空間 V^*，外積 $\wedge^k V$，対称積 $S^k V$ 等が定義されるが，これらの代数的構成を M の各点 x 上のファイバーに適用することにより，ベクトル束 E, E' 等に対しても $E \oplus E'$，$E \otimes E'$，E^*，$\wedge^k E$, $S^k E$ 等が定義される．E, E' に対する変換関数が，$\{\psi_{\alpha\beta}\}$，$\{\psi'_{\alpha\beta}\}$ ならば，$E \oplus E'$，$E \otimes E'$ の変換関数は $\{\psi_{\alpha\beta} \oplus \psi'_{\alpha\beta}\}$，$\{\psi_{\alpha\beta} \otimes \psi'_{\alpha\beta}\}$ で与えられる．ただし，$\psi_{\alpha\beta} \oplus \psi'_{\alpha\beta}$ の意味は

$$\psi_{\alpha\beta} \oplus \psi'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \psi'_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

また，E^* の変換関数は $\{{}^t\psi_{\alpha\beta}{}^{-1}\}$ で与えられる．E のファイバーの次元が r のとき，$\wedge^r E$ を $\det E$ とも書くが，このときは $\{\det \psi_{\alpha\beta}\}$ が変換関数になる．これは，一般に A が r 次元ベクトル束空間の線形変換ならば，A の引きおこす $\wedge^r V$ の線形変換が $\det A$ であることにもとづく．

部分ベクトル束 $E' \subset E$ に対し，E における内積 g を使って直交部分ベクトル束 $E'^{\perp}$ を定義したが，ベクトル空間の場合と同様に同型

$$E = E' \oplus E'^{\perp} \tag{1.13}$$

が成り立つ．

いま，もう一つの多様体 M' から写像 $f: M' \to M$ が与えられているとき，M 上のベクトル束 E から次のようにして M' 上のベクトル束 E' を誘導することができる．

(1.14)　$E' = \{(x', \xi) \in M' \times E\,;\, f(x') = \pi(\xi)\}, \qquad \pi'((x', \xi)) = x'.$

直観的にいえば，$x' \in M'$ 上のファイバーとして $f(x')$ でのファイバー $E_{f(x')} = \pi^{-1}(f(x))$ をとることにより得られるベクトル束である．E' を f^*E または $f^{-1}E$ と書き，E から f によって**誘導されたベクトル束** (induced bundle) と呼ぶ．(E' が局所的に直積であることは，E が U 上で直積，すなわち，$\pi^{-1}(U) \approx U \times \boldsymbol{R}^r$ ならば，E' が $f^{-1}(U)$ 上で直積になることからわかる.)

例 1　M をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+k}$ 内の n 次元部分多様体とする．$\boldsymbol{R}^{n+k}$ の接ベクトル束 $T\boldsymbol{R}^{n+k}$ は直積 $T\boldsymbol{R}^{n+k} = \boldsymbol{R}^{n+k} \times \boldsymbol{R}^{n+k}$ である．$T\boldsymbol{R}^{n+k}$ を M に制限すれば $T\boldsymbol{R}^{n+k}|_M = M \times \boldsymbol{R}^{n+k}$ である．(M に制限するとは，はめこみ射像 $i: M \to \boldsymbol{R}^{n+k}$ により誘導することにほかならない．すなわち，$T\boldsymbol{R}^{n+k}|_M = i^*(T\boldsymbol{R}^{n+k})$．明らかに TM は $T\boldsymbol{R}^{n+k}|_M$ の部分ベクトル束であり，その直交ベクトル束 $T^\perp M$ は $M \subset \boldsymbol{R}^{n+k}$ の**法束** (normal bundle) であり

(1.15)
$$T\boldsymbol{R}^{n+k}|_M = TM \oplus T^\perp M$$

となる．

例 2　特に M が $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の超曲面で，その単位法ベクトル場 ν を連続にえらべれば，ν を M から超球 $S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ への写像と考える．これを **Gauss 写像** (Gauss map) とか **Gauss の球面表示** (spherical representation) と呼ぶ．そのとき，TS^n を ν で誘導することにより，TM が得られる．すなわち

(1.16)
$$TM = \nu^*(TS^n)$$

問題 1.1　n 次元コンパクト多様体 M 上に $\boldsymbol{R}^r$ をファイバーとするベクトル束 E が与えられたとき，E の切断全体のつくる (無限次元) ベクトル空間の中に適当な有限次元部分空間 V があって，E の任意の点 $\xi \in E_x = \pi^{-1}(x)$ に対し切断 $\sigma \in V$ が存在し $\xi = \sigma(x)$ となることを証明せよ．

問題 1.2　上の問題で，なるべく低い次元の V をえらびたい．何次元あれば大丈夫か，n と r を使って表わせ．

問題 1.3　例 2 で示したように，M の接ベクトル束 TM は適当なベクトル束と直和をとることにより，(すなわち M を $\boldsymbol{R}^{n+k}$ に埋めこみ，法束 $T^\perp M$ と直和をとることによ

り）直積束になる（(1.15) を参照)．いま，M 上の任意のベクトル束 E に対しても適当なベクトル束 E' が存在して，$E \oplus E'$ が直積束となることを証明せよ．

注意　問題1.1と問題1.2で M がコンパクトでない場合も次元論の知識のある読者は考えてみるとよい．我々は多様体は常にパラコンパクトであると仮定する．パラコンパクトとは，任意の開被覆に対し，その細分として局所有限開被覆がとれることである．M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ が局所有限であるというのは，各点 $x \in M$ が有限個の U_α としか交わらないような近傍をもつことである．大切なのは局所有限開被覆 $\{U_\alpha\}$ に対して **1の分割** (partition of 1) と呼ばれる C^∞ の関数の族 $\{\rho_\alpha\}$ が存在することである．これらの関数は，定義により次の性質をもっている．

（i）　各 α について，$0 \leqq \rho_\alpha(x) \leqq 1$，$x \in M$

（ii）　各 α について，$\{x \in M\,;\, \rho_\alpha(x) \neq 0\}$ の閉包（これを ρ_α の台 (support) と呼ぶ）は U_α に含まれ，

（iii）　各点 $x \in M$ で　$$\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$$
が成り立つ．

1の分割は，例えばベクトル束 E に内積 g をつくるときにも使う．まず局所的に g_α をつくり，$\{\rho_\alpha\}$ を使い $g = \sum \rho_\alpha g_\alpha$ として M 上全体で g を得る．

§2.　微分形式

前節で，1次微分形式を定義した．それは共変接ベクトル束 T^*M の切断であった．前節の言葉を用いるならば，k 次微分形式は $\wedge^k T^*M$ の切断として定義される．これが一番簡潔な定義であろう．もう少し詳しく説明すると，**k 次微分形式** (differential k-form) ω は，M の各点 x で写像

(2.1)
$$\omega : \underbrace{T_xM \times \cdots \times T_xM}_{(k\text{回})} \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

を定義し，次の性質をもつ．

（i）　$\omega(X_1, \cdots, X_k)$ は $X_1, \cdots, X_k \in T_x$ のうち $k-1$ 個を固定したとき，残りの一つに関して線形で，

（ii）　$\omega(X_1, \cdots, X_k)$ は**歪対称** (skew-symmetric)，すなわち，X_i と X_j を

入れかえると符号が変わり，

（iii） ω は微分可能，すなわち，$X_1, \cdots, X_k$ が微分可能なベクトル場ならば，$\omega(X_1, \cdots, X_k)$ は微分可能な M 上の関数になる．

さて，M 上の k 次微分形式の全体を $A^k(M)$ と書き，

$$A(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} A^k(M)$$

とおく．$\omega \in A^p(M)$，$\omega' \in A^q(M)$ のとき，**外積** (exterior product) $\omega \wedge \omega' \in A^{p+q}(M)$ は

$$(2.2) \qquad (\omega \wedge \omega')(X_1, \cdots, X_{p+q}) =$$
$$\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma}(\mathrm{sign}\,\sigma)\,\omega(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(p)})\,\omega'(X_{\sigma(p+1)}, \cdots, X_{\sigma(p+q)})$$

で与えられる．ここで，σ は $\{1, \cdots, p+q\}$ の置換で，$\mathrm{sign}\,\sigma$ とは偶置換なら 1，奇置換なら -1 という意味である．要するに写像 $(X_1, \cdots, X_{p+q}) \mapsto \omega(X_1, \cdots, X_p)\,\omega'(X_{p+1}, \cdots, X_{p+q})$ を交代化しただけのことである．一番よく使うのは $p = q = 1$ の場合で，その場合には，

$$(2.3) \qquad (\omega \wedge \omega')(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega(X)\,\omega'(Y) - \omega(Y)\,\omega'(X))$$

となる．

局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ を使えば，$(dx^1, \cdots, dx^n)$ が T^*M の基になるから，p 次微分形式 ω は

$$(2.4) \qquad \omega = \frac{1}{p!}\sum a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

と書ける．ここで $a_{i_1\cdots i_p}$ は歪対称である．もちろん，(2.4) を

$$(2.5) \qquad \omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

と書くこともできる．

関数 f に対して，その全微分 df は 1 次微分形式であり，それは

$$(2.6) \qquad df(X) = X(f), \qquad X \in TM$$

によって定義され，局所座標系によって

$$(2.7) \qquad df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

で与えられることは既に知っている．**外微分作用素** (exterior-differentiation) d は，これを微分形式に拡張したものであって，次の性質によって定義される．

（i）　$d: A^p(M) \longrightarrow A^{p+1}(M)$ は線形写像，

（ii）　$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge d\omega'$,

$$\omega \in A^p(M), \quad \omega' \in A^q(M),$$

（iii）　$dd = 0$,

（iv）　$f \in A^0(M)$ に対して，df は (2.6) で定義された通り．

以上の性質から，p 次微分形式 ω が (2.4) で与えられたとき，$d\omega$ が

$$d\omega = \frac{1}{p!} \sum da_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{2.8}$$

となることは容易にわかる．これを，また (2.4) の形に書くには

$$d\omega = \frac{1}{p!} \sum \partial_j a_{i_1 \cdots i_p} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$
$$(\partial_j a_{i_1 \cdots i_p} = \partial a_{i_1 \cdots i_p} / \partial x^j),$$

を交代化して

$$d\omega = \frac{1}{(p+1)!} \sum (\partial_j a_{i_1 \cdots i_p} - \partial_{i_1} a_{j i_2 \cdots i_p} - \cdots - \partial_{i_p} a_{i_1 \cdots i_{p-1} j}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{2.9}$$

とすればよい．

特に，1 次微分形式 $\omega = \sum a_i dx^i$ の場合には

$$d\omega = \sum da_i dx^i = \frac{1}{2} \sum (\partial_j a_i - \partial_i a_j) dx^j \wedge dx^i \tag{2.10}$$

となる．局所座標を使わないで，これに相当する式を書くと，M 上の任意のベクトル場 X, Y に対して

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2} \{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\} \tag{2.11}$$

という等式になる．もちろん，これを，$d\omega$ の定義にすることもできる．p 次微分形式に対しても，(2.11) と同様の式を得ることは難しくない．無限次元多様体の上で微分形式を論ずるには，(2.10) でなく (2.11) の方を使わねばな

らないであろう.

多様体MからNへの微分可能写像φは，T_xMから$T_{\varphi(x)}N$への写像φ_*を引きおこす．しかし，$\varphi_*: TM \to TN$ は，M上のベクトル場XをN上のベクトル場に移さない．すなわち，$\varphi_* X$はXが1点での接ベクトルのときには意味があっても，Xがベクトル場であるときには，Mの異なる2点x, yが$\varphi(x)=\varphi(y)$ となっていても $\varphi_*(X_x)=\varphi_*(X_y)$ とは限らないから，$\varphi_*(X)$ はN上のベクトル場としては定義されない．(しかし，$\varphi_*(X)$ は$\varphi^* TN$の切断として定義されるが，ここでは，このことには触れない.)

これに反して，微分形式に対しては，φは自然に写像

(2.12) $$\varphi^*: A^p(N) \longrightarrow A^p(M)$$

を引きおこす．実際，$\omega \in A^p(N)$ ならば，$\varphi^*\omega \in A^p(M)$ は

(2.13) $$\varphi^*\omega(X_1, \cdots, X_p) = \omega(\varphi_* X_1, \cdots, \varphi_* X_p), \qquad X_i \in T_xM$$

によって定義される．$\varphi^*\omega$をωのφによる**引き戻し** (pull-back) と呼ぶ．$(x^1, \cdots, x^m)$ をMの局所座標系，$(y^1, \cdots, y^n)$ をNの局所座標系，φが

$$y^j = y^j(x^1, \cdots, x^m), \qquad j = 1, \cdots, n$$

で与えられているとき，

$$\omega = \frac{1}{p!}\sum a_{i_1\cdots i_p}(y)\, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p}$$

の引き戻し$\varphi^*\omega$は，y^jに$y^j(x^1, \cdots, x^m)$ を代入することによって得られる．例えば，

$$\omega = \sum a_j(y)\, dy^j$$

ならば

(2.14) $$\varphi^*\omega = \sum a_j(y(x))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\, dx^i$$

である．これから，引き戻しφ^*は線形写像であるのみならず

(2.15) $$\varphi^*(\omega \wedge \omega') = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\omega',$$

(2.16) $$\varphi^* d\omega = d\varphi^*\omega$$

という性質をもっていることがわかる．これらの理由で，微分形式の方がベク

トル場よりも使いやすい.

問題 2.1 r 次微分形式 ω とベクトル場 $X_0, X_1, \cdots, X_r$ に対し次の式が成り立つことを証明せよ.

$$(d\omega)(X_0, X_1, \cdots, X_r) = \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i(\omega(X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_r))$$

$$+\frac{1}{r+1}\sum_{0\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_r).$$

ここで ^ はその項が抜けていることを示す.($r=1$ の場合が (2.11) である.)

問題 2.2 多様体 M の 共変接空間 T^*M 上に 次 の よう に 1 次微分形式 θ を定義する. $\pi: T^*M \to M$ を射影, その微分を $\pi_*: T(T^*M) \to TM$ と書くとき,

$$\theta(X) = \xi(\pi_* X), \qquad X \in T_\xi(T^*M),\ \xi \in T^*M,$$

と定義する. $x^1, \cdots, x^n$ を M の局所座標系, それから自然に得られる T^*M の局所座標系を $x^1, \cdots, x^n$, $p_1, \cdots, p_n$ とするとき, θ をこの座標系で表わせ. また $d\theta$, $(d\theta)^n = d\theta \wedge \cdots \wedge d\theta$ も表わせ.

§3. 微分形式の積分

M を n 次元多様体, $\{U_\alpha\}$ を座標近傍による局所有限な被覆, $\{\rho_\alpha\}$ をそれに対する 1 の分割とする. コンパクト集合の外では 0 であるような n 次微分形式 ω に対し, 積分 $\int_M \omega$ を定義する.

$$(3.1) \qquad \int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$$

となるべきだから, $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$ を定義すればよい. すなわち, 一つの座標近傍 U_α の上の積分を定義すればよい. U_α 内の座標系を $(x^1, \cdots, x^n)$ として

$$\rho_\alpha \omega = a\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

と書いたとき,

$$(3.2) \qquad \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \int_{U_\alpha} a\, dx^1 \cdots dx^n$$

と定義する．ここで，右辺は普通のリーマン積分の意味に理解する．しかし，上の積分は座標系のとり方に依存する．$(y^1, \cdots, y^n)$ をもう一つの座標系とすると，

$$a\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = aJ\,dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n. \tag{3.3}$$

ここで，J は座標変換のヤコビアン

$$J = \det(\partial x^i/\partial y^j)$$

である．一方，リーマン積分において

$$\int_{U_\alpha} a\,dx^1 \cdots dx^n = \int_{U_\alpha} a\,|J|\,dy^1 \cdots dy^n \tag{3.4}$$

であるから，$\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$ は $J > 0$ の場合は座標系 $(y^1, \cdots, y^n)$ で計算しても同じだが，$J < 0$ の場合には，$(y^1, \cdots, y^n)$ で計算すると符号が変わってしまう．この難点を克服するために，M に向きがついているとする．

一般に，多様体 M に**向きがつけられる** (orientable) とは，M を座標近傍 $\{U_\alpha\}$ で覆い，各 U_α の座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ を適当にえらぶことにより，共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ での座標変換のヤコビアン J が正になるようにできるということである．そして，そのような座標系をえらんだときに，M に**向きをつけた** (oriented) という．

M に向きがついていれば，それと適合する座標系だけ使って積分 (3.2) を定義することにより，(3.1) も矛盾なく定義できる．したがって，以下 $\int_M \omega$ と書くときは，M に向きがついていると仮定しているのである．

(3.5) **定理** 向きのついた n 次元多様体 M の上の $(n-1)$ 次微分形式 ω が，コンパクトな台をもつならば（すなわち M のコンパクト集合の外では 0 になるならば）次式が成り立つ．

$$\int_M d\omega = 0.$$

証明 1 の分解 $\{\rho_\alpha\}$ を使って $\omega = \sum \rho_\alpha \omega$ と書き，$\int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) = 0$ を証明すれば充分だから，$M = \boldsymbol{R}^n$ で，その領域 $D = \{(x^1, \cdots, x^n)\,;\, 0 < x^i < 1\}$

の外では ω が 0 の場合に帰する.

$\omega = \sum a_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$ と書けるから，例えば $\omega = a\,dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ の場合に証明すればよい．a は D の外で 0 だから，

$$\int_M d\omega = \int_D d\omega = \int_D \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$
$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx^1 \right) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$
$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(a \Big|_{x^1=0}^{1} \right) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = 0.$$

特に，次の場合が応用上，大切である.

(3.6) **系** 向きのついたコンパクト n 次元多様体 M の上の $(n-1)$ 次微分形式 ω に対し

$$\int_M d\omega = 0$$

が成り立つ.

上の定理は次に述べる Stokes の定理の特別な場合である．多様体 M の定義では，M は開集合の族 $\{U_\alpha\}$ で覆われ，各 U_α から $\boldsymbol{R}^n$ の開集合に同相写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \boldsymbol{R}^n$ が与えられていた．**境界をもつ多様体** (manifold with boundary) を定義するには，$\boldsymbol{R}^n$ の代りに，上半空間 $H^n = \{(\xi^1, \cdots, \xi^n) ; \xi^n \geqq 0\}$ を使えばよい．ある U_α は φ_α により，H^n の内部 (すなわち $\xi^n > 0$) の開集合に同相であるが，ある U_α は H^n の境界の一部を含むような H^n の開集合に同相になっている．そして，H^n の境界に対応する M の部分を M の境界と呼び ∂M と書く．そのとき，∂M は $(n-1)$ 次元多様体になる．M に向きがついていると，∂M にも自然に向きがつく．すなわち，$x^1 = \xi^1 \circ \varphi_\alpha, \cdots, x^n = \xi^n \circ \varphi_\alpha$ が与えられた向きの局所座標系ならば，$(x^1, \cdots, x^{n-1})$ を $U_\alpha \cap \partial M$ の局所座標系とすることにより，∂M に向きがつく．実際，$(y^1, \cdots, y^n)$ が U_β 内の座標系だとすると，$\partial M \cap U_\alpha \cap U_\beta$ の点では $y^n = 0$ だから (すなわち，$x^n = 0$ 実して $x^1, \cdots, x^{n-1}$ を動かしても $y^n = 0$ だから)，

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, \cdots, n-1 \tag{3.7}$$

である．したがって，座標変換のヤコビアンは，$\partial M \cap U_\alpha \cap U_\beta$ の点で

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \dfrac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} & \dfrac{\partial y^{n-1}}{\partial x^n} \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

の形をしている．$x^n > 0$ の方向と $y^n > 0$ の方向は，いずれも M の内部の方向で一致しているから $\dfrac{\partial y^n}{\partial x^n} > 0$ である．J の行列式が正だから，J の最後の行と列を除いてできる行列（すなわち ∂M の座標変換のヤコビアン）の行列式も正である．（しかし実際は，n が奇数の場合にはこれと反対の向きを ∂M につける．）

(3.9)　**定理**　M を方向のついた n 次元多様体で境界 ∂M をもつとする．M 上の $(n-1)$ 次微分形式 ω がコンパクトな台をもつならば

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega\,.$$

証明　(3.5) の証明と本質的に同じである．問題を局所化した後，$\omega_i = a_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$ とおくと，(3.5) の場合と同様にして，$i = 1, \cdots, n-1$ に対しては，$\int_M d\omega_i = 0$ となる．一方，∂M 上では $\omega_i = 0$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ は明白．よって，$\omega = a\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$ を考えればよい．

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= (-1)^{n-1} \int_M \frac{\partial a}{\partial x^n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 a \Big|_{x^n=0}^1 dx^1 \cdots dx^{n-1}\,. \end{aligned}$$

a は $x^n = 1$ では 0 だから，この積分は

$$(-1)^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 a \Big|_{x^n=0} dx^1 \cdots dx^{n-1}\,.$$

上に述べた ∂M の向きのつけ方の約束により，これは $\int_{\partial M} \omega$ にほかならない．

(3.10) **系**　向きのついた，そして境界をもつコンパクト n 次元多様体 M 上の $(n-1)$ 次微分形式 ω に対して，

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

が成り立つ.

問題 3.1　M, N を向きのついたコンパクト n 次元多様体，$f: M \to N$ を微分可能な写像とする．そのとき整数 k が存在して，N 上の任意の n 次微分形式 ω に対し

$$\int_M f^*\omega = k \cdot \int_N \omega$$

が成り立つことを証明せよ．(この整数 k を写像 f の **次数** (degree) と呼ぶ.)

(ヒント)　$x \in M$ に対し，$f_*: T_x M \to T_{f(x)} N$ が 1 対 1 で，向きを保つときは，$\delta_x(f) = 1$，向きを逆にするときは $\delta_x(f) = -1$，1 対 1 でないときは $\delta_x(f) = 0$ と定義する．y を f の正則値（すなわち臨界値でない）とするとき，上の k は

$$k = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \delta_x(f)$$

によって与えられることを示せ.

§4.　Poincaré の 補 題

ω が p 次微分形式で $\omega = d\theta$ と書けるならば，$d\omega = dd\theta = 0$ である．ここでは，その逆の問題を考える．すなわち，$d\omega = 0$ ならば，適当な $(p-1)$ 次微分形式 θ が存在して $\omega = d\theta$ と書けるであろうか．2 変数の 1 次微分形式の場合には，微積分で，単連結な領域では $d\omega = 0$ ならば適当な関数 f が存在して，$\omega = df$ となることを習ったはずである．一方，(x, y)-平面から原点を除いた領域で定義された 1 次微分形式

(4.1)
$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

は $d\omega = 0$ となるが，その領域全体では $\omega = df$ の形には書けない．これから述べる Poincaré の補題がこの点をはっきりさせる.

まず，ホモトピー作用素をつくることからはじめる．単位区間 $I=[0,1]$ と多様体 M の直積 $I\times M$ を考える．(M を底とするシリンダーである．) このシリンダーの底面と上面を，次の写像 j_0, j_1 によって，M と同一視する．

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} j_0 : M &\longrightarrow I\times M; \qquad j_0(x)=(0,x),\ x\in M,\\ j_1 : M &\longrightarrow I\times M; \qquad j_1(x)=(1,x),\ x\in M. \end{aligned}$$

ホモトピー作用素

$$(4.3)\qquad K : A^{p+1}(I\times M) \longrightarrow A^p(M)$$

を次のように定義する．区間 I のパラメターを t とすると，$I\times M$ 上の $(p+1)$ 次微分形式 $\omega\in A^{p+1}(I\times M)$ は

$$(4.4)\qquad \omega=\omega_1+dt\wedge\omega_2$$

と書ける．ここで ω_1,ω_2 は dt を含まない微分形式である．そのとき

$$(4.5)\qquad K\omega=\int_0^1 dt\,\omega_2$$

と定義する．この意味は，ω_2 は dt を含まないが，t には依存する $I\times M$ 上の p 次微分形式であるから

$$(4.6)\qquad \omega_2=\frac{1}{p!}\sum a_{i_1\cdots i_p}(t,x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

の形をしている．(4.5) の意味は

$$(4.7)\qquad K\omega=\frac{1}{p!}\sum\left(\int_0^1 a_{i_1\cdots i_p}(t,x)dt\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

である．このとき次の式が成り立つ．

$$(4.8)\qquad K(d\omega)+d(K\omega)=j_1{}^*\omega-j_0{}^*\omega,\qquad \omega\in A^{p+1}(I\times M),\ p\geqq 0.$$

これを確かめるには，添字を簡素化して

$$\omega=\sum a_J(t,x)\,dx^J+\sum a_H(t,x)\,dt\wedge dx^H$$

と書く．J は $j_1,\cdots,j_{p+1}$，dx^J は $dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{p+1}}$ の代り，同様に H は $h_1,\cdots,h_p$，dx^H は $dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_p}$ の代りである．すると

$$\begin{aligned} K(d\omega)&=\sum K\left(\frac{\partial a_J}{\partial t}dt\wedge dx^J-\frac{\partial a_H}{\partial x^i}dt\wedge dx^i\wedge dx^H\right)\\ &=\sum a_J(1,x)dx^J-\sum a_J(0,x)dx^J-\left(\int_0^1\frac{\partial a_H}{\partial x^i}dt\right)dx^i\wedge dx^H, \end{aligned}$$

$$d(K\omega) = \sum d\left(\left(\int_0^1 a_H\,dt\right)dx^H\right) = \sum\left(\int_0^1 \frac{\partial a_H}{\partial x^i}dt\right)dx^i \wedge dx^H.$$

したがって，

$$K(d\omega) + d(K\omega) = \sum a_J(1,x)\,dx^J - \sum a_J(0,x)\,dx^J = j_1{}^*\omega - j_0{}^*\omega.$$

いま，Mとして$\boldsymbol{R}^n$の領域Uで1点に可縮なものをとる．すなわち，写像

(4.9) $$\varphi: I \times U \longrightarrow U$$

と1点 $x_0 \in U$ が存在して，すべての $x \in U$ に対し

$$\varphi(1,x) = x, \qquad \varphi(0,x) = x_0$$

とする．

$$\varphi \circ j_0(x) = x_0, \qquad \varphi \circ j_1(x) = x$$

であるから，U上の $(p+1)$ 次微分形式 $\omega \in A^{p+1}(U)$ に対し $\varphi^*\omega \in A^{p+1}(I \times U)$ は次の性質をもつ．

(4.10) $$j_0{}^*(\varphi^*\omega) = 0, \qquad j_1{}^*(\varphi^*\omega) = \omega.$$

等式 (4.8) を $\varphi^*\omega$ に適用すると

(4.11) $$K\,d\varphi^*\omega + dK\varphi^*\omega = \omega$$

を得る．したがって，$d\omega = 0$ ならば $d\varphi^*\omega = \varphi^*d\omega = 0$ だから

(4.12) $$d(K\varphi^*\omega) = \omega$$

となる．これを Poincaré の補題として述べる．

(4.13) **Poincaré の補題** いま，Uが$\boldsymbol{R}^n$の領域で1点に可縮とする．U上の $(p+1)$ 次微分形式ω（ただし $p \geqq 0$）が $d\omega = 0$ ならば，U上にp次微分形式θが存在して $\omega = d\theta$ と書ける．

もしUが球状領域のように原点0を含み，すべての点 $x \in U$ に対し線分 $\{tx\,;\,0 \leqq t \leqq 1\}$ も含むならば（このようなUを星形領域と呼ぶ），(4.13) のθを具体的につくることができる．まず (4.9) の $\varphi: I \times U \to U$ として

$$\varphi(t,x) = tx$$

をとる．

$$\omega = \frac{1}{(p+1)!} \sum a_{i_0 \cdots i_p}(x)\, dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

ならば

$$\varphi^* \omega = \frac{1}{(p+1)!} \sum a_{i_0 \cdots i_p}(tx)\, t^{p+1} dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$+ \frac{1}{p!} \sum a_{i_0 \cdots i_p}(tx)\, t^p x^{i_0}\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

だから，(4.7) により

$$\theta = K(\varphi^* \omega) = \frac{1}{p!} \sum \left(\int_0^1 a_{i_0 \cdots i_p}(tx)\, t^p\, dt \right) x^{i_0}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

である．

問題 4.1 ω を $\boldsymbol{R}^n$ 上の $p+1$ 次微分形式で $d\omega = 0$，そして，領域 $U = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \boldsymbol{R}^n\,;\, |x^1| < 1, \cdots, |x^n| < 1\}$ の外では $\omega = 0$ とする．そのとき，U 外でやはり $\theta = 0$ となる p 次微分形式 θ で $\omega = d\theta$ を満たすものが存在するか．一般には存在しないなら ω がどのような条件を満たせば，上記の性質をもつ θ が存在するか．

§5. de Rham コホモロジー

この節でも，M は n 次元多様体とする．その上の p 次微分形式 ω が条件 $d\omega = 0$ を満たすとき，**閉じている** (closed) という．さらに，M 上に $(p-1)$ 次微分形式 θ が存在して，$\omega = d\theta$ と書けるならば ω は**完全** (exact) であるという．$dd\theta = 0$ であるから，完全微分形式は閉微分形式である．

閉じた p 次微分形式の全体を $Z^p(M)$，完全な p 次微分形式の全体を $B^p(M)$ と書く．すなわち，

$$(5.1) \quad \begin{aligned} Z^p(M) &= \{\omega \in A^p(M)\,;\, d\omega = 0\} \\ &= \operatorname{Ker}\{d : A^p(M) \to A^{p+1}(M)\}, \\ B^p(M) &= \{d\theta\,;\, \theta \in A^{p-1}(M)\} \\ &= \operatorname{Im}\{d : A^{p-1}(M) \to A^p(M)\} \end{aligned}$$

とおく．上に述べたように，$B^p(M) \subset Z^p(M)$ である．

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M) \tag{5.2}$$

と定義して，$H^p(M)$ を M の p 次元 **de Rham コホモロジー群** (de Rham cohomology group) と呼ぶ．前節の Poincaré の補題は，$U \subset \boldsymbol{R}^n$ が 1 点に可縮な領域ならば，

$$H^p(U) = 0, \qquad p > 0 \tag{5.3}$$

という形に述べることができる．

$df = 0$ となる関数は定数であるから（もちろん，M は連結としている）$Z^0(M) = \boldsymbol{R}$．また，定義から $B^0(M) = 0$ だから，常に

$$H^0(M) = \boldsymbol{R} \tag{5.4}$$

であることに注意しておこう．

各 $A^p(M)$ はベクトル空間であるが

$$A(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} A^p(M)$$

は，外積 $\wedge$ によって多元環になる．さらに，

$$Z(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} Z^p(M)$$

がその部分環になることは，公式

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta \pm \omega \wedge d\eta$$

から明らかである．また，この公式から

$$B(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} B^p(M)$$

が $Z(M)$ のイデアルになることもわかる．したがって

$$H(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} H^p(M)$$

も多元環になる．すなわち，$\omega \in Z^p(M)$，$\eta \in Z^q(M)$ によって代表される $H^p(M)$，$H^q(M)$ の元を，それぞれ $[\omega]$, $[\eta]$ と書けば

$$[\omega] \cdot [\eta] = [\omega \wedge \eta]$$

によって $H(M)$ 内に積が定義されるのである．したがって，$H(M)$ を de Rham の **コホモロジー環** (cohomology ring) と呼ぶ．

$H(M)$ を定義するには M が微分多様体であることを使ったが，実は $H(M)$ は M の位相空間としての性質できまる．すなわち，位相空間として定義される M の実コホモロジーに $H(M)$ は同型になる．この事実 (**de Rham の定理**) を A. Weil の方法によって説明しよう．そのために **Čech コホモロジー** の説明からはじめる．$\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}$ を M の開被覆とし，§3 の意味で局所有限とする．$U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p}\neq\emptyset$ のとき，これを

$$U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}=U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p}$$

と書き，$(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ を Čech の **p 次元単体** (p-simplex) と呼ぶ．(各 U_α あるいは α を頂点，$U_\alpha\cap U_\beta$ を α と β を結ぶ辺と考えれば普通の単体との対応がつく.) Čech の意味での **p 次元双対鎖** (p-cochain) c とは各 p 次元単体 $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p}$ (あるいは $(\alpha_0,\cdots,\alpha_p)$ と書いてもよい) に実数 $c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\in\boldsymbol{R}$ を対応させるものである．すなわち，c は p 次元単体の集合 $\{(\alpha_0,\cdots,\alpha_p)\,;\,U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p}\neq\emptyset\}$ の上で定義された関数である．我々は，$c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ は $\alpha_0,\cdots,\alpha_p$ に関して交代であると仮定する．すなわち，

$$c_{\alpha_0\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots\alpha_p}=-c_{\alpha_0\cdots\alpha_j\cdots\alpha_i\cdots\alpha_p}.$$

p 次元双対鎖の全体はベクトル空間になる．これを

$$C^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$$

と書く．写像，**双対境界作用素** (coboundary operator),

$$\delta: C^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})\longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$$

を

(5.5) $$(\delta c)_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{p+1}}=\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j c_{\alpha_0\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_p}$$

で定義すると

(5.6) $$\delta\circ\delta=0$$

となることは容易に確かめられる．被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}$ に関する Čech コホモロジ

一群は

(5.7) $H^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})=\{c\in C^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})\,;\,\delta c=0\}/\delta(C^{p-1}(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R}))$

で定義される．M そのものの Čech コホモロジー群 $H^p(M\,;\boldsymbol{R})$ を定義するには，色々な被覆 $\mathfrak{U}$ に対する $H^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$ の逆極限をとるのが一般的な方法だが，$U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}=U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p}$ がすべて1点に可縮であるような $\mathfrak{U}$ を使えば，極限をとらなくても $H^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$ がすでに M のコホモロジー $H^p(M\,;\boldsymbol{R})$ になることが知られている．そのような被覆を可縮な被覆と呼ぶことにする．多様体には必ずそのような被覆 $\mathfrak{U}$ が存在する．（これは，例えば「M にリーマン計量をとり，リーマン幾何の意味で凸であるような U_α をえらべば，すべての $U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}$ も凸であるから特に1点に可縮」という議論で証明されるが，ここでは可縮な被覆の存在を仮定してしまう．）

さて，上の Čech の双対鎖の定義において，実数の集り $c=(c_{\alpha_0\cdots\alpha_p})$ の代りに $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ 上で定義された q 次微分形式の集り $\omega=(\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p})$ を考え，そのような p 次双対鎖の全体を

$$C^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)$$

と書くことにする．写像（双対境界作用素）

$$\delta : C^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)\longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)$$

は，(5.5) と同様に定義される．（正確には，(5.5) の右辺は，$c_{\alpha_0\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_p}$ の代りに $\omega_{\alpha_0\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_p}$ を $U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}$ に制限したものを書く．）コホモロジー群

(5.8) $H^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)=\{\omega\in C^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)\,;\,\delta\omega=0\}/\delta(C^{p-1}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q))$

も同様に定義される．（これは層 (sheaf) を係数にもつコホモロジーの例であるが，ここでは，その一般論は展開しない．）

§3で考えた1の分解 $1=\sum\rho_\alpha$ を使って $C(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)=\bigoplus_p C^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)$ に対するホモトピー作用素

$$L : C^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)\longrightarrow C^{p-1}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)$$

を定義するにあたり，$U_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}$ 上の微分形式 $\rho_\alpha\omega_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}$ をその外では0として，

$U_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}$ 上の微分形式と考える．そして，L を

(5.9) $\quad (L\omega)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}} = \sum \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}, \qquad \omega = (\omega_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}) \in C^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)$

で定義する．そうすると

$$
\begin{aligned}
(\delta L\omega)_{\alpha_0\cdots\alpha_p} &= \sum_j (-1)^j (L\omega)_{\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_p} \\
&= \sum_{\alpha,j} (-1)^j \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_p}, \\
(L\delta\omega)_{\alpha_0\cdots\alpha_p} &= \sum_\alpha \rho_\alpha (\delta\omega)_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_p} \\
&= (\sum_\alpha \rho_\alpha)\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p} + \sum_{\alpha,j} (-1)^{j+1} \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_p}.
\end{aligned}
$$

したがって，

(5.10) $\quad \delta L\omega + L\delta\omega = \omega, \qquad \omega = (\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p}) \in C^p(\mathfrak{U}\,; A^q),\ \ p \geqq 1,$

を得る．(5.10) によって，もし $\delta\omega = 0$ ならば $\omega = \delta(L\omega)$ であるから，

(5.11) $$H^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q) = 0, \qquad p \geqq 1$$

となる．一方，$H^0(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q) = \{\omega \in C^0(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q)\,;\,\delta\omega = 0\}$ を定義によって計算すると，$\delta\omega = 0$ は

$$(\delta\omega)_{\alpha_0\alpha_1} = \omega_{\alpha_1} - \omega_{\alpha_0} = 0, \quad \text{すなわち，} \omega_{\alpha_0} = \omega_{\alpha_1}$$

が $U_{\alpha_0\alpha_1} = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}$ 上で成り立つことだから，$\omega = (\omega_\alpha)$ は M 上で定義された q 次微分形式と同一視される．したがって，

(5.12) $$H^0(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^q) = A^q(M)$$

となる．

(5.11) の証明に使った本質的な点は，θ が U_α 上の微分形式ならば，$\rho_\alpha\theta$ もまた U_α 上の微分形式であるということである．同じ議論が $C^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$ に対して使えないのは，定数 c に対して $\rho_\alpha c$ はもはや定数でないから，$L: C^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R}) \to C^{p-1}(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$ を定義できないのである．

これで de Rham コホモロジー $H^p(M)$ と Čech コホモロジー $H^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$ の同型を証明する準備が整った．次ページの図を参考にしながら証明を読むとよい．

$$
(5.13)\quad
\begin{array}{ccccccc}
C^{p+1}(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R}) & \xrightarrow{i} & C^{p+1}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^0) & \xrightarrow{d} & & & \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \\
C^{p}(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R}) & \xrightarrow{i} & C^{p}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^0) & \xrightarrow{d} & & & \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \\
C^{p-1}(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R}) & \xrightarrow{i} & C^{p-1}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^0) & \xrightarrow{d} & & & \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
C^{0}(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R}) & \xrightarrow{i} & C^{0}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^0) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & C^{0}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^p)
\end{array}
$$

ここで i は，実数を定値関数とみなす写像である．

写像 $H^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})\to H^p(M)$ をつくるために，$c=(c_{\alpha_0\cdots\alpha_p})\in C^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$ で $\delta c=0$ となるものから出発する．$\omega^{(p,0)}=ic\in C^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^0)$ とおく．$0=i\delta c=\delta ic=\delta\omega^{(p,0)}$ となるが，$H^p(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^0)=0$ であるから，$\omega^{(p,0)}=\delta\theta^{(p-1,0)}$ となる $\theta^{(p-1,0)}=(\theta^{(p-1,0)}{}_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}})\in C^{p-1}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^0)$ が存在する．$\omega^{(p-1,1)}=d\theta^{(p-1,0)}=(d\theta^{(p-1,0)}{}_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}})\in C^{p-1}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^1)$ とおく．$\delta\omega^{(p-1,1)}=\delta d\theta^{(p-1,0)}=d\delta\theta^{(p-1,0)}=d\omega^{(p,0)}=dic=0$ となるが $H^{p-1}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^1)=0$ だから $\omega^{(p-1,1)}=\delta\theta^{(p-2,1)}$ となる $\theta^{(p-2,1)}=(\theta^{(p-2,1)}{}_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-2}})\in C^{p-2}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^1)$ が存在する．$\omega^{(p-2,2)}=d\theta^{(p-2,1)}=(d\theta^{(p-2,1)}{}_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-2}})\in C^{p-2}(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^2)$ とおく．これを続けて，$\theta^{(0,p-1)}\in C^0(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^{p-1})$，そして $\omega^{(0,p)}=d\theta^{(0,p-1)}\in C^0(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^p)$ に到達する．この過程をまとめると

$$
(5.14)\quad
\begin{aligned}
&ic=\omega^{(p,0)}=\delta\theta^{(p-1,0)},\\
&d\theta^{(p-1,0)}=\omega^{(p-1,1)}=\delta\theta^{(p-2,1)},\\
&d\theta^{(p-2,1)}=\omega^{(p-2,2)}=\delta\theta^{(p-3,2)},\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&d\theta^{(1,p-2)}=\omega^{(1,p-1)}=\delta\theta^{(0,p-1)},\\
&d\theta^{(0,p-1)}=\omega^{(0,p)}
\end{aligned}
$$

となる．$\delta\omega^{(0,p)}=\delta d\theta^{(0,p-1)}=d\delta\theta^{(0,p-1)}=d\omega^{(1,p-1)}=dd\theta^{(1,p-2)}=0$ だか

ら，$\omega^{(0,p)}$ は M 上で定義された p 次微分形式，すなわち，$\omega^{(0,p)} \in A^p(M)$．また $d\omega^{(0,p)} = dd\theta^{(0,p-1)} = 0$ だから，閉微分形式，すなわち，$\omega^{(0,p)} \in Z^p(M)$ である．その代表する $H^p(M)$ の元を $[\omega^{(0,p)}]$ と書く．このようにして，c で代表される $H^p(\mathfrak{U}; \boldsymbol{R})$ の元 $[c]$ に対し $[\omega^{(0,p)}] \in H^p(M)$ を対応させる．ここで，写像 $H^p(\mathfrak{U}; \boldsymbol{R}) \to H^p(M)$ が代表 c のえらび方，また途中の過程でえらんだ $\theta^{(p-1,0)}, \cdots, \theta^{(0,p-1)}$ のえらび方に依存しないことを確かめるのは読者にまかせる．$p = 1, 2$ の場合を考えれば，アイデアはわかるからそれで充分だろう．

さて，写像 $H^p(\mathfrak{U}; \boldsymbol{R}) \to H^p(M)$ を定義するのには，$\mathfrak{U}$ が局所有限で，1 の分解 $1 = \sum \rho_\alpha$ があることからホモトピー作用素 L がつくれることを使っただけである．この写像が同型写像であることを証明するために $\mathfrak{U}$ が可縮な被覆であることを使う．すなわち，$U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}$ で Poincaré の補題が成り立つことを使って，逆向きの写像 $H^p(M) \to H^p(\mathfrak{U}; \boldsymbol{R})$ をつくるが，また，図式 (5.13) を見ながら読むとよい．閉じた p 次微分形式 $\omega \in Z^p(M) \subset A^p(M)$ から出発する．$\omega_{\alpha_0}{}^{(0,p)} = \omega | U_{\alpha_0}$ そして $\omega^{(0,p)} = (\omega_{\alpha_0}{}^{(0,p)}) \in C^0(\mathfrak{U}; \mathscr{A}^p)$ とおくと，$\delta\omega^{(0,p)} = 0$．さて，$d\omega_{\alpha_0}{}^{(0,p)} = 0$ であるから，$\omega_{\alpha_0}{}^{(0,p)} = d\theta_{\alpha_0}{}^{(0,p-1)}$ となる $\theta_{\alpha_0}{}^{(0,p-1)} \in A^{p-1}(U_{\alpha_0})$ が存在する．$\theta^{(0,p-1)} = (\theta_{\alpha_0}{}^{(0,p-1)}) \in C^0(\mathfrak{U}; \mathscr{A}^{p-1})$ とおく．$\omega^{(1,p-1)} = \delta\theta^{(0,p-1)} \in C^1(\mathfrak{U}; \mathscr{A}^{p-1})$ と定義する．$d\omega^{(1,p-1)} = d\delta\theta^{(0,p-1)} = \delta d\theta^{(0,p-1)} = \delta\omega^{(0,p)} = 0$ だから，$\omega^{(1,p-1)} = (\omega_{\alpha_0\alpha_1}{}^{(1,p-1)})$ に Poincaré の補題を適用して，$\omega^{(1,p-1)} = d\theta^{(1,p-2)}$ となる $\theta^{(1,p-2)} \in C^1(\mathfrak{U}; \mathscr{A}^{p-2})$ を見つける．これは明らかに c から $\omega^{(0,p)}$ をつくったときの逆の操作である．したがって，$H^p(\mathfrak{U}; \boldsymbol{R}) \to H^p(M)$ は同型写像である．以上，要約して，**de Rham の定理**を述べる．

(5.15)　**定理**　$\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ を局所有限で可縮な M の被覆とする．そのとき Čech コホモロジー群 $H^p(\mathfrak{U}; \boldsymbol{R})$ と de Rham コホモロジー群 $H^p(M)$ の間に自然な同型対応が存在する．

この同型対応が $\bigoplus H^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$ と $\bigoplus H^p(M)$ の環の構造も保つが，この事実の証明は省く．

上の証明は，Weil の論文に従った．もっとホモロジー代数の一般論を展開してから証明するのが現状だが，限られた頁数では，原論文の証明がよいように思われる．

ここでは，de Rham コホモロジーを Čech コホモロジーと比べてきたが，特異コホモロジー (singular cohomology) と比べるには，Δ^p が p 次元単体，$\sigma: \Delta^p \to M$ を特異単体（すなわち，可微分な写像）としたとき，p 次微分形式 ω との積 (cap 積に相当する) を積分 $\int_{\Delta^p} \sigma^* \omega$ で定義する．これを，普通，$\int_\sigma \omega$ と書く．Stokes の公式

$$\int_\tau d\omega = \int_{\partial\tau} \omega$$

によって，この積は，特異ホモロジー群 $H_p(M\,;\boldsymbol{R})$ と de Rham コホモロジー群 $H^p(M\,;\boldsymbol{R})$ の間に積を引きおこし，これが de Rham コホモロジーと特異コホモロジーの間の同型対応を与える．

問題 5.1　$A^p{}_c(M) = \{\omega \in A^p(M)\,;\omega$ の台がコンパクト$\}$ と定義し

$$Z^p{}_c(M) = \mathrm{Ker}\{d : A^p{}_c(M) \to A^{p+1}{}_c(M)\},$$
$$B^p{}_c(M) = \mathrm{Im}\{d : A^{p-1}{}_c(M) \to A^p{}_c(M)\},$$
$$H^p{}_c(M) = Z^p{}_c(M)/B^p{}_c(M)$$

とおき，$H^p{}_c(M)$ を M の **コンパクト台の p 次元 de Rham コホモロジー** (**p-th de Rham cohomology with compact support**) と呼ぶ．$H^p{}_c(\boldsymbol{R}^n)$ と $H^p(\boldsymbol{R}^n)$ を比べよ．

問題 5.2　外積 $\wedge$ により de Rham コホモロジー群 $H^*(M) = \bigoplus H^p(M)$ は環になるが，対応する Čech コホモロジー環の積の公式を求めよ．すなわち，M の可縮な被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ をとり，$[\omega] \in H^p(M)$，$[\omega'] \in H^q(M)$ に対応する $[c] \in H^p(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$，$[c'] \in H^q(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$ を考え，$[\omega \wedge \omega'] \in H^{p+q}(M)$ に対応する $H^{p+q}(\mathfrak{U}\,;\boldsymbol{R})$ の元を $c = \{c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\}$，$c' = \{c'_{\beta_0\cdots\beta_q}\}$ を使って表わせ．（本質を理解するには $p=1$，$q=2$ の場合を試みれば充分であろう．）

§6.　テンソルと Lie 微分

実数の加法群 $\boldsymbol{R}$ が多様体 M に作用しているとき，それを **1 助変数変換群** (1-parameter group of transformations) と呼ぶ．正確にいうと，各実数 $t \in \boldsymbol{R}$ に対し，M の変換（微分同相写像）φ_t が与えられ，写像

$$(6.1)\quad \varphi : \boldsymbol{R} \times M \longrightarrow M, \qquad \varphi(t,x) = \varphi_t(x), \qquad (t \in \boldsymbol{R},\ x \in M)$$

が微分可能で，

$$(6.2)\qquad \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

となっているとき，$\{\varphi_t\,;\,t \in \boldsymbol{R}\}$ を 1 助変数変換群と呼ぶ．

このとき，M の各点 x に対し，$\{\varphi_t(x)\,;\,t \in \boldsymbol{R}\}$ を x の **軌道** (orbit) と呼ぶが，$t=0$ におけるその接ベクトルを $X_x = \left.\dfrac{d\varphi_t(x)}{dt}\right|_{t=0}$ と書く．このようにして，1 助変数変換群 $\{\varphi_t\}$ はベクトル場 X を引きおこす．（したがって，X を **無限小変換** (infinitesimal transformation) と呼ぶこともある．）

逆に，ベクトル場 X が与えられたとき，それを引きおこすような 1 助変数変換群 $\{\varphi_t\}$ が存在する．正確には，$\{\varphi_t\}$ は以下に説明するように局所変換群である．$\{\varphi_t\}$ をつくるために，それが X を引きおこすという条件を局所座標を使って書いてみる．ベクトル場を

$$X = \sum \xi^i(x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

求める変換群 $\varphi(t,x)$ を $(\varphi^1(t,x), \cdots, \varphi^n(t,x))$ とすると，条件は，常微分方程式

$$(6.3)\qquad \frac{d\varphi^i}{dt} = \xi^i(\varphi^1(t,x), \cdots, \varphi^n(t,x)), \qquad i = 1, \cdots, n,$$

と初期条件

$$(6.4)\qquad \varphi^i(0,x) = x^i, \qquad i = 1, \cdots, n$$

で与えられる．このような微分方程式の解の存在と一意性はよく知られているが，一般には，t, x に関する解の存在範囲に制限がつく．すなわち，$\varphi(t,x)$ は

すべての $t \in \boldsymbol{R}$, $x \in M$ に対して存在するとは限らず，一般には $\boldsymbol{R} \times M$ 内の $\{0\} \times M$ の適当な近傍でしか $\varphi(t, x)$ は定義されない．x が変わると，$\varphi(t, x)$ の定義される範囲の t の区間 $|t| < \delta$ が変わるのである．もし，この δ を x に依存しないようにえらべるなら，(6.2) により実は $\varphi(t, x)$ はすべての $t \in \boldsymbol{R}$ に対して定義されることになる．$\varphi(t, x)$ がすべての $t \in \boldsymbol{R}$（そしてすべての $x \in M$）に対して定義されるとき，ベクトル場 X は**完備** (complete) であるという．例えば，$\boldsymbol{R}^2$ 上でベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ は完備で，x^1 軸方向の平行移動の群を生成するが，$\boldsymbol{R}^2$ から 1 点を除いた領域上では完備でない．コンパクト多様体 M の上では，すべてのベクトル場が完備であることは，開被覆によるコンパクト性の定義を使って容易に確かめられる．

以上のように，一般には X の生成する $\{\varphi_t\}$ は，本当の意味での変換群ではなく，**1 助変数局所変換群** (1-parameter group of local transformations) と呼ばれるものである．しかし，以下この節で議論する Lie 微分では，$\varphi_t(x)$ の定義範囲は重要でないから，“局所”という言葉をいちいち使わない．

初期条件 (6.4) の下で (6.3) の解は，t の高次の項を無視すると

(6.5)　　$\varphi^i(t, x) = x^i + \xi^i(x)t + O(t^2), \qquad i = 1, \cdots, n$

である．Lie 微分の計算で，この事実を使う．

簡単のために $T_x = T_xM$, $T_x{}^* = T_x{}^*M$ とおいて，テンソル積 $T^r{}_{s,x} = T_x \otimes \cdots \otimes T_x \otimes T_x{}^* \otimes \cdots \otimes T_x{}^*$（$T_x$ を r 回，$T_x{}^*$ を s 回）をまとめ，

$$T^r{}_s(M) = \bigcup_{x \in M} T^r{}_{s,x}$$

と定義する．§1 で定義したベクトル束のテンソル積の記号を使えば，

(6.6)　　$T^r{}_s(M) = TM \otimes \cdots \otimes TM \otimes T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M$

である．これをタイプ (r, s) **のテンソル束** (tensor bundle of type (r, s)) と呼ぶ．詳しくは，r を**反変次数** (contravariant degree)，s を**共変次数** (covariant degree) という．$T^r{}_s(M)$ の切断を**タイプ** (r, s)（あるいは，**反変次数** r，**共変次数** s）**のテンソル場** (tensor field of type (r, s) (or contravriant degree r and covariant degree s)) と呼ぶ．

例えば，ベクトル場は反変次数1のテンソル場であり，p 次微分形式は，共変次数 p のテンソル場である．（N がもう一つの多様体で $f: M \to N$ が微分可能な写像であるとき，$f_*: TM \to TN$ であるし，ω が N 上の微分形式なら $f^*\omega$ は M 上の微分形式であるから圏 (category) の理論で使う共変，反変と意味が逆になっているが，共変テンソル，反変テンソルの術語は伝統的なものである.）

さて，S をタイプ (r, s) のテンソル場とする．$\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$ は局所的には TM の基となり，$(dx^1, \cdots, dx^n)$ は，T^*M の双対基となるから，S は局所的には

$$(6.7)\qquad S = \sum S^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

と書ける．ここで $S^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ を座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ に関する S の **成分** (components) と呼ぶ．座標系からつくられる基の代わりに，TM の勝手な局所切断 $e_1, \cdots, e_n$ で基になるものをとり，T^*M に対する双対基を使って S を表わすこともある．

さて，ベクトル場 X によって生成された1助変数変換群 $\{\varphi_t\}$ によって，テンソル場を動かしてみる．各 t に対し，φ_t は T_x と $T_{\varphi_t(x)}$ の間の同型対応，$T^*{}_x$ と $T^*{}_{\varphi_t(x)}$ の間の同型対応を引きおこし，テンソル空間 $T^r{}_{s,x}$ と $T^r{}_{s,\varphi_t(x)}$ の間にも同型対応を引きおこす．これを

$$(6.8)\qquad \tilde{\varphi}_t : T^r{}_{s,x} \longrightarrow T^r{}_{s,\varphi_t(x)}$$

と書く．

いま，S がタイプ (r, s) のテンソル場ならば，$(\tilde{\varphi}_t{}^{-1}S)_x = \tilde{\varphi}_t{}^{-1}(S_{\varphi(t)})$ は $T^r{}_{s,x}$ の元であり，S_x はもちろん定義により $T^r{}_{s,x}$ の元であるから，次の定義が可能である．

$$(6.9)\qquad (L_X S)_x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\tilde{\varphi}_t{}^{-1}S)_x - S_x] = \left(\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}_t{}^{-1}S_x\right)_{t=0}.$$

このようにして得られたタイプ (r,s) のテンソル場 $L_X S$ を，S の X に関する(あるいは X 方向の) **Lie 微分** (Lie derivative) と呼ぶ．次の事実は定義から明らか．

(6.10) $$L_X(aS+bS')=aL_XS+bL_XS', \qquad a,b\in \boldsymbol{R},$$

(6.11) $$L_X(S\otimes S')=L_XS\otimes S'+S\otimes L_XS'.$$

(6.12) L_X はテンソルの縮約と可換である．

この意味を説明しよう．$T_x\otimes T_x{}^*=\mathrm{End}(T_x)$ $(=\mathrm{Hom}(T_x,T_x))$ だから，$T_x\otimes T_x{}^*$ の元を T_x の線形変換とみなせば，そのトレースを考えることができる．したがって，S がタイプ $(1,1)$ のテンソル場ならば，それを TM の自己準同型の場とみなし，トレースをとることにより M 上の関数，すなわちタイプ $(0,0)$ のテンソル場を得る．座標系で

(6.13) $$S=\sum S^i{}_j\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$$

と表わしたとき，S から

(6.14) $$\mathrm{tr}\,S=\sum S^i{}_i$$

を得る．この操作を**縮約** (contraction) と呼ぶ．一般に，タイプ (r,s) で $r,s\geqq 1$ の場合には，$TM\otimes\cdots\otimes TM\otimes T^*M\otimes\cdots\otimes T^*M$ から TM と T^*M を一つずつえらび，その対に上の縮約を行い，タイプ $(r-1,\ s-1)$ のテンソル場を得る．S が (6.7) の形に表わされているとき，例えば，最初の TM と T^*M をえらんで縮約すれば

(6.15) $$\mathrm{tr}^1{}_1(S)=\sum S^{ki_2\cdots i_r}{}_{kj_2\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_2}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$$

を得る．($\mathrm{tr}^1{}_1$ の添字はどこでトレースをとったかを示す．) いま，φ が M の任意の変換ならば，$\mathrm{tr}^1{}_1(\tilde\varphi S)=\tilde\varphi(\mathrm{tr}^1{}_1 S)$ である．(例えば，タイプ $(1,1)$ のとき，S と $\tilde\varphi S$ を TM の自己準同型とみなせば，$(\tilde\varphi S)=\varphi_*\circ S\circ\varphi_*{}^{-1}$ であることからわかる．) 特に，縮約は φ_t と可換で，その極限として，Lie 微分作用素 L_X とも可換である．

Lie 微分 $L_X S$ を定義するために，X を積分して $\{\varphi_t\}$ をつくり，$\tilde{\varphi}_t^{-1} S$ を微分したのであるから，φ_t を経ないで直接 X から $L_X S$ が計算できるはずである．L_X は一般の微分 (derivation) の性質 (6.10)，(6.11) をもっており，またテンソル場は，(局所的には) 関数とベクトル場と1次微分形式からテンソル積と和で生成されるから，$L_X S$ を S が関数，ベクトル場，および1次微分形式の場合に計算すれば充分である．

関数 f に対しては，定義 (6.9) から

$$L_X f = Xf = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i \tag{6.16}$$

であることはすぐわかる．

次に，ベクトル場 $Y = \sum \eta^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ に対し，$L_X Y$ を求める．定義 (6.9) によれば，$\tilde{\varphi}_t^{-1} S$ を $t=0$ で微分するから，以下の計算では，(6.5) において $O(t^2)$ の項を無視してよいことに注意する．$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ は

$$\varphi^i(-t, x) = x^i - \xi^i(x)\, t + O(t^2)$$

で与えられるから，その微分 $(\varphi_t^{-1})_*$ の成分は

$$\frac{\partial \varphi^i(-t, x)}{\partial x^j} = \delta^i{}_j - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} t + O(t^2)$$

で与えられる．$(\tilde{\varphi}_t^{-1} Y)_x = \tilde{\varphi}_t^{-1} Y_{\varphi(t,x)}$ だから，

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi}_t^{-1} Y)_x &= \sum \left(\delta^i{}_j - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} t\right) \eta^j(\varphi(t, x)) \frac{\partial}{\partial x^i} + O(t^2) \\ &= \sum \left(\delta^i{}_j - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} t\right)\left(\eta^j + \sum \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} \xi^k t\right) \frac{\partial}{\partial x^i} + O(t^2).\end{aligned}$$

ここで ξ^i, $\partial \xi^i / \partial x^j$, η^j, $\partial \eta^j / \partial x^k$ はすべて，$x = \varphi(0, x)$ での値である．したがって，

$$(\tilde{\varphi}_t^{-1} Y)_x - Y_x = \sum \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} \xi^k - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \eta^k\right) t \frac{\partial}{\partial x^j} + O(t^2),$$

$$\begin{aligned}L_X Y &= \sum \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} \xi^k - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \eta^k\right) \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= [X, Y].\end{aligned} \tag{6.17}$$

次に，微分形式 ω に対して $L_X\omega$ を計算するため，**内積** (interior product) $\iota_X\omega$ を説明する．ω が 1 次微分形式ならば

$$\iota_X\omega = \omega(X) \tag{6.18}$$

で，これを高次微分形式に対しては，反微分 (anti-derivation) として拡張する．すなわち，ω と ω' がそれぞれ p 次，q 次の微分形式ならば

$$\iota_X(\omega\wedge\omega') = (\iota_X\omega')\wedge\omega + (-1)^p\omega\wedge\iota_X\omega' \tag{6.19}$$

となるように ι_X を拡張する．したがって，ω が p 次ならば，$\iota_X\omega$ は $(p-1)$ 次で，任意のベクトル場 $X_1,\cdots,X_{p-1}$ に対し

$$(\iota_X\omega)(X_1,\cdots,X_{p-1}) = p\omega(X,X_1,\cdots,X_{p-1}) \tag{6.20}$$

となる．(これは，ω が 1 次微分形式 $\omega_1,\cdots,\omega_p$ の積 $\omega=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p$ のときに (6.19) を使って確かめられる．)

さて，ω が 1 次微分形式のときに $L_X\omega$ を計算する．(6.14) のように縮約を tr (トレース) と書くと $\omega(Y)=\mathrm{tr}(Y\otimes\omega)$ であるから，(6.16)，(6.12)，(6.11)，(6.17) を順に使って

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) &= L_X(\omega(Y)) = L_X(\mathrm{tr}(Y\otimes\omega)) = \mathrm{tr}(L_X(Y\otimes\omega)) \\ &= \mathrm{tr}(L_XY\otimes\omega + Y\otimes L_X\omega) \\ &= \omega([X,Y]) + (L_X\omega)(Y) \end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$(L_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]).$$

ここで (2.11) (すなわち，$d\omega(X,Y)=\frac{1}{2}\{X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y])\}$) を使って，

$$(L_X\omega)(Y) = 2d\omega(X,Z) + Y(\omega(X)) = (\iota_Xd\omega + d\iota_X\omega)(Y).$$

したがって，次の公式

$$L_X\omega = \iota_Xd\omega + d\iota_X\omega \tag{6.21}$$

を得る．

我々は，上の公式を1次微分形式ωに対して証明したが，実はこれは，すべての微分形式に対して成り立つ．まず0次微分形式，すなわち，関数fに対しては，定義により$\iota_X f = 0$であるから，(6.21) は (6.16) にほかならない．任意の微分形式は関数と1次微分形式から生成される．したがって (6.21) を証明するには，L_Xと$\iota_X d + d\iota_X$が共に微分形式の環に，微分として作用する．すなわち，

(6.22)　$$L_X(\omega \wedge \omega') = L_X\omega \wedge \omega' + \omega \wedge L_X\omega',$$

(6.23)　$$(\iota_X d + d\iota_X)(\omega \wedge \omega') = (\iota_X d + d\iota_X)\omega \wedge \omega' + \omega \wedge (\iota_X d + d\iota_X)\omega'$$

となることを証明すれば充分である．(6.22) は (6.11) およびL_Xが$\omega \otimes \omega'$の交代化と可換であることからわかる．(L_Xが交代化と可換であることはMの変換φ_tが引きおこした$\tilde{\varphi}_t$が交代化と可換であることから明白である．)

(6.23) は，dが微分形式の次数を1上げる反微分であり，ι_Xが次数を1下げる反微分であることから，$\iota_X d + d\iota_X$が次数を変えない微分であることを証明するだけのことである．

同様の議論で次の (i), (ii) も証明できる．

(6.24)　**定理**　ベクトル場X, Yに対し，次の公式が成り立つ．

(i)　$L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X,Y]}$,

(ii)　$L_X \iota_Y - \iota_Y L_X = \iota_{[X,Y]}$,

(iii)　$d\iota_X + \iota_X d = L_X$.

注意　(i) は微分形式に対してだけでなく，テンソル場に対しても成り立つ式である．これは写像$X \mapsto L_X$がベクトル場のつくる Lie 環から，テンソル場に作用する微分のつくる Lie 環への準同型写像であることを示している．

問題 6.1　写像$f: M \to N$による引き戻し$f^*: A^p(N) \to A^p(M)$はdと可換だから，準同型写像$f^*: H^p(N) \to H^p(M)$を引きおこす．

(i)　写像$f, g: M \to N$が互にホモトープなら，引きおこされる de Rham コホモロ

ジーの準同型写像 $f^*, g^* : H^p(N) \to H^p(M)$ は一致することを証明せよ．(ヒント：Poincaré の補題の証明が参考になるであろう．)

(ii)　$f^* : H^p(M) \to H^p(M)$ が恒等写像でないような同相変換 $f : M \to M$ の例をみつけよ．

2 接　続

歴史的にみてみると，接続は，ユークリッド空間の部分多様体の Levi-Civita 接続からリーマン空間の Levi-Civita 接続へ，そしてアフィン接続から共形および射影接続，さらに一般の主ファイバー束の接続へと発展してきたのであるから，教育的立場からはその順を追うのが望ましい．

しかし，それは時間的にも頁数の上でも非能率である．論理的には，まず主ファイバー束の場合を説明して，あとはその特別な場合として扱うのが近道であるが，Lie 群に慣れていない読者には好ましい道順ではあるまい．

そこで折衷案として，ベクトル束の接続から始めることにする．主ファイバー束の言葉でいえば，構造群が一般線形群 $GL(r;\boldsymbol{R})$ の場合である．応用上は一般の Lie 群でなく，行列で与えられるいわゆる古典群の場合で充分であるから $GL(r;\boldsymbol{R})$ から始めるのは自然であろう．

§1. ベクトル束の接続

この節では，M は n 次元多様体，E はファイバーが $\boldsymbol{R}^r$ の M 上のベクトル束とする．$\pi : E \to M$ をその射影，すなわち，$x \in M$ に対し $E_x = \pi^{-1}(x)$ が x 上のファイバーである．写像 $\xi : M \to E$ で $\pi(\xi(x)) = x$ となるものを E の M 上の切断と呼んだ．切断 ξ は各点 $x \in M$ に対し，x 上のファイバー E_x の1点 ξ_x を対応させる．微分可能な切断だけを考え，E の切断の全体を $\Gamma(E)$ と書く．$\Gamma(E)$ は（無限次元）のベクトル空間である．M 上の（微分可能な）関数の全体を $A^0(M)$ と書くことにした．$A^0(M)$ は可換環である．関数 $f \in A^0(M)$ と切断 $\xi \in \Gamma(E)$ の積はまた切断 $f\xi \in \Gamma(E)$ である．(代数の言葉でいうと $\Gamma(E)$ は $A^0(M)$ 上の加群 ($A^0(M)$-module) である．しかしこのような術語はどうでもよい．)

関数 $f \in A^0(M)$ に対して，微分 $df \in A^1(M)$ が定義された．(一般に $A^p(M)$ は M 上の p 次微分形式のつくるベクトル空間と定義した)．また，M の接ベクトル X に対し X 方向の微分 $Xf = df(X)$ も定義した．このような微分作用素を $\Gamma(E)$ に対しても定義したい．E が直積 $M \times \boldsymbol{R}^r$ ならば，切断 ξ は r 個の関数 $\xi^1, \cdots, \xi^r$ から成り立っていると考え，$d\xi^1, \cdots, d\xi^r$ を ξ の微分と考えてもよいだろう．しかし，一般のベクトル束 E は，局所的に直積に書けるだけで，M 全体の上では直積とならない．M を座標近傍系 $\{U_\alpha\}$ で覆い各 U_α 上で E を直積として表わし，上のように微分を定義すると，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上で $U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r$ と $U_\beta \times \boldsymbol{R}^r$ に対する微分が一致しない．

一般にベクトル束の切断に対しては直積の場合のように一つだけ自然な微分があるのではなく，無限にたくさん微分となり得るものが存在する．関数に対する微分 d は，線形写像

$$d : A^0(M) \longrightarrow A^1(M)$$

であって，Leibniz の式

$$d(f\cdot g)=df\cdot g+f\cdot dg$$

が成り立つ．ここで，1次微分形式全体の空間 $A^1(M)$ とは，共変接ベクトル束 T^*M の切断の全体 $\Gamma(T^*M)$ にほかならないことに注意して，E の **共変微分作用素** あるいは単に **共変微分** (covariant differentiation) とは，線形写像

(1.1) $$\nabla:\Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(T^*M\otimes E)$$

で Leibniz の公式

(1.2) $$\nabla(f\xi)=df\otimes\xi+f\cdot\nabla\xi,\qquad f\in A^0(M),\ \xi\in\Gamma(E)$$

を満たすものであると定義する．$\nabla\xi$ を ξ の **共変微分** (covariant derivative) と呼ぶ．$\Gamma(T^*M\otimes E)$ の元を E に値をもつ1次微分形式と呼んだりする．接ベクトル $X\in T_xM$ に対し $\nabla\xi$ の値 $\nabla\xi(X)$ は E_x の元である．

(1.3) $$\nabla\xi(X)=\nabla_X\xi$$

とも書き，$\nabla_X\xi$ を ξ の X 方向の共変微分と呼ぶ．したがって各 $X\in T_xM$ に対し

(1.4) $$\nabla_X:\Gamma(E)\longrightarrow E_x$$

は線形写像で

(1.5) $$\nabla_X(f\xi)=(Xf)\cdot\xi+f\cdot\nabla_X\xi,\qquad f\in A^0(M),\ \xi\in\Gamma(E)$$

を満たし，また ∇_X は X に関しても線形である．

各 U_α 上で E が直積になるような局所有限な M の開被覆 $\{U_\alpha\}$，およびそれに対する1の分解 $\sum\rho_\alpha=1$ を使えば，E に必ず共変微分 ∇ の存在することがわかる．すなわち，$E|_{U_\alpha}$ の共変微分 ∇_α をえらび，

(1.6) $$\nabla\xi=\sum\nabla_\alpha\rho_\alpha\xi,\qquad \xi\in\Gamma(E)$$

とおけば，∇ が共変微分になる．

共変微分を **接続** (connection) とも呼ぶ．E に接続は無限にたくさん存在する．5章，6章では接続の全体を考える．それまでは主に，一つの接続の性質を調べる．

ベクトル束 E は局所的には直積だから，局所的には一次独立な切断 $e_1, \cdots, e_r$ が存在する．そのような $(e_1, \cdots, e_r)$ を E の **局所標構場** (local frame field) と呼ぶ．E の任意の切断 ξ は局所的には，

(1.7) $$\xi = \sum \xi^\lambda e_\lambda$$

と一意的に書ける．いま，∇ を E の共変微分とすると，$\nabla e_\lambda \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ は $e_1, \cdots e_r$ の一次結合として書けるから

(1.8) $$\nabla e_\lambda = \sum \omega_\lambda{}^\mu e_\mu$$

とおく．ここで，$\omega_\lambda{}^\mu$ は (局所的に定義された) 1 次微分形式である．一般の切断 $\xi = \sum \xi^\lambda e_\lambda$ に対しては，(1.2) により

(1.9) $$\nabla\xi = \sum (d\xi^\lambda + \sum \omega_\mu{}^\lambda \xi^\mu) e_\lambda$$

となる．したがって，局所的には ∇ は $(e_1, \cdots, e_r)$ と $\omega = (\omega_\lambda{}^\mu)$ によって決まる．$\omega = (\omega_\lambda{}^\mu)$ を ∇ の **接続形式** (connection form) と呼ぶ．

次に局所標構場を $(e_1, \cdots, e_r)$ から $(e'_1, \cdots, e'_r)$ に変えたとき，接続形式 $\omega = (\omega_\lambda{}^\mu)$ がどう変化するかを調べる．

(1.10) $$e'_\lambda = \sum a_\lambda{}^\mu e_\mu$$

とおく．ここで，各 $a_\lambda{}^\mu$ は関数であるから，$a = (a_\mu{}^\lambda)$ は，r 次の一般線形群 $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ に値をもつ関数である．次に

(1.11) $$\nabla e'_\lambda = \sum \omega'_\lambda{}^\mu e'_\mu$$

により，1 次微分形式の行列 $\omega' = (\omega'_\lambda{}^\mu)$ を定義する．これに (1.10) を代入し，(1.9) を使えば

(1.12) $$\sum \omega_\mu{}^\lambda a_\nu{}^\mu + da_\nu{}^\lambda = \sum a_\mu{}^\lambda \omega'_\nu{}^\mu$$

を得る．行列の記号で書けば，(1.12) は

$$\omega a + da = a\omega',$$

すなわち，

(1.13) $$\omega' = a^{-1}\omega a + a^{-1} da$$

となる．

$\{U_\alpha\}$ を M の開被覆で，各 U_α の上で E は直積 $U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r$ に同型であると

し，同型対応をえらんでおく．$\boldsymbol{R}^r$ の自然な基に対応して，E の U_α の切断 $e_1{}^{(\alpha)}, \cdots, e_r{}^{(\alpha)}$ がある．E の接続 ∇ の $e_1{}^{(\alpha)}, \cdots, e_r{}^{(\alpha)}$ に関する接続形式の行列を ω_α とする．E の変換関数を $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ とすると（1章 §1 を参照），(1.13) を $\omega = \omega_\alpha$, $\omega' = \omega_\beta$, $a = \psi_{\alpha\beta}$ に適用して，

$$(1.14) \qquad \omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}{}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}{}^{-1}d\psi_{\alpha\beta} \qquad (U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上で})$$

を得る．

逆に，各 U_α 上に1次微分形式の $(r \times r)$ の行列 $\omega_\alpha = (\omega_{\alpha\mu}{}^\lambda)$ が与えられていて，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上では ω_α と ω_β は変換関数 $\psi_{\alpha\beta}$ により関係式 (1.14) で結ばれていると，E に $\{\omega_\alpha\}$ を接続形式とするような接続 ∇ がただ一つ存在する．実際，$E|_{U_\alpha}$ では，局所標構場 $e_1{}^{(\alpha)}, \cdots, e_r{}^{(\alpha)}$ を使って ∇ を

$$(1.15) \qquad \nabla e_\lambda{}^{(\alpha)} = \sum_\mu \omega_{\alpha\lambda}{}^\mu e_\mu{}^{(\alpha)}$$

で定義し，あとは (1.9) を使って $E|_{U_\alpha}$ の任意の切断 ξ に対し $\nabla\xi$ を定義すればよい．このようにして $E|_{U_\alpha}$ と $E|_{U_\beta}$ で定義した接続が $U_\alpha \cap U_\beta$ で一致することを証明するのに (1.14) を使うのである．証明は機械的に計算するだけのことだが，次のように行列の記号を使えば少々簡単である．記号を簡単にするため $e_\lambda{}^{(\alpha)}$, $\omega_\alpha = (\omega_{\alpha\mu}{}^\lambda)$ 等は α を消して e_λ, $\omega = (\omega_\mu{}^\lambda)$ と書き，$e_\lambda{}^{(\beta)}$, $\omega_\beta = (\omega_{\beta\mu}{}^\lambda)$ は β の代わりにダッシュを使って e'_λ, $\omega' = (\omega'_\mu{}^\lambda)$ と書く．また，$\psi_{\alpha\beta}$ を a と書く．E の $U_\alpha \cap U_\beta$ 上の切断を二通りに $\sum \xi^\lambda e_\lambda = \sum \xi'^\lambda e'_\lambda$ と書く．ベクトルの記号で $\sum \xi^\lambda e_\lambda$ を $e \cdot \xi$, $\sum \xi'^\lambda e'_\lambda$ を $e' \cdot \xi'$ と書けば，

$$\begin{aligned}
\nabla(e' \cdot \xi') &= \nabla e' \cdot \xi' + e' \cdot d\xi' = e' \cdot \omega' \cdot \xi' + e' \cdot d\xi' \\
&= ea(a^{-1}\omega a + a^{-1}da)a^{-1}\xi + ea \cdot d(a^{-1}\xi) \\
&= e\omega\xi + e \cdot da \cdot a^{-1}\xi - e \cdot da \cdot a^{-1}\xi + e \cdot d\xi \\
&= \nabla(e \cdot \xi).
\end{aligned}$$

これで我々の主張が証明された．

要約すると，接続は (1.2) を満たす線形写像 ∇ として定義されるが，U_α 上の行列値の1次微分形式 ω_α で $U_\alpha \cap U_\beta$ 上では，(1.14) が成り立つようなものとしても与えられるのである．

多様体 M 上に二つのベクトル束 E と E' があり，それぞれに接続 ∇, ∇' が与えられているとする．そのとき，$E \oplus E'$ に自然に接続 $\nabla \oplus \nabla'$ を定義するのは簡単である．すなわち，

$$(1.16) \qquad (\nabla \oplus \nabla')(\xi \oplus \xi') = \nabla\xi \oplus \nabla\xi',$$
$$\xi \oplus \xi' \in \Gamma(E \oplus E') = \Gamma(E) \oplus \Gamma(E').$$

E と E' の局所標構場を $e_1, \cdots, e_r$ と $e_1', \cdots, e_s'$ とし，対応する接続形式を ω と ω' とすれば $\nabla \oplus \nabla'$ の接続形式が $r+s$ 次の行列値の 1 次微分形式

$$(1.17) \qquad \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega' \end{pmatrix}$$

で与えられることも明らかであろう．

テンソル積 $E \otimes E'$ に対しては，接続 $\nabla \otimes I_{E'} + I_E \otimes \nabla'$ が

$$(1.18) \qquad (\nabla \otimes I_{E'} + I_E \otimes \nabla')(\xi \otimes \xi') = \nabla\xi \otimes \xi' + \xi \otimes \nabla'\xi',$$
$$\xi \in \Gamma(E), \ \xi' \in \Gamma(E')$$

で定義される．対応する接続形式は rs 次の行列

$$(1.19) \qquad \omega \otimes I_s + I_r \otimes \omega'$$

で与えられる．

E^* を E の双対ベクトル束とすると，E の接続 ∇ は E^* の接続 ∇ (同じ記号 ∇ を使う) を引きおこすが，それは，次の関係式で与えられる．

$$(1.20) \quad d\langle \xi^*, \xi \rangle = \langle \nabla\xi^*, \xi \rangle + \langle \xi^*, \nabla\xi \rangle, \qquad \xi \in \Gamma(E), \ \xi^* \in \Gamma(E^*).$$

ここで $\langle \ , \ \rangle$ は双対を定義する内積である．E の局所標構場 $e_1, \cdots, e_r$ に対し，その双対基 $e^1, \cdots, e^r$ を E^* の標構として使えば $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i{}_j$ だから (1.20) を $\xi^* = e^i$, $\xi = e_j$ に適用して $-{}^t\omega$ が E^* に対する接続形式となる．(ここで ${}^t\omega$ は ω の転置行列である.)

(1.18) と (1.20) を使えば，E の接続から $\mathrm{End}\, E = E \otimes E^*$ の接続が得られる．$\varphi \in \Gamma(\mathrm{End}\, E)$ に対し $\nabla\varphi$ は

$$(1.21) \qquad \nabla(\varphi \cdot \xi) = \nabla\varphi \cdot \xi + \varphi \cdot \nabla\xi, \qquad \xi \in A^0(E)$$

によって与えられる．

M 上のベクトル束 E と写像 $f: M' \to M$ が与えられたとき，M' 上にベクトル束 $E' = f^*E$ が誘導された (1 章 (1.14) 参照)．E が M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ で与えられているならば，E' は M' の開被覆 $\{f^{-1}U_\alpha\}$ と変換関数 $\{f^*\psi_{\alpha\beta}\}$ で与えられる．さらに E の接続 ∇ が接続形式 $\{\omega_\alpha\}$ で与えられているならば，

$$\omega'_\alpha = f^*\omega_\alpha \tag{1.22}$$

によって定義された $\{\omega'_\alpha\}$ が E' に接続を定義する．この接続 $\nabla' = f^*\nabla$ を ∇ から f によって **誘導された接続** とか，**引きおこされた接続** (induced connection) と呼ぶ．

問題 1.1 E と F を M 上のベクトル束とする．その切断の空間の間に写像 $\varphi: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ が与えられていて，

$$\varphi(\xi_1 + \xi_2) = \varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2), \qquad \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(E),$$
$$\varphi(f\xi) = f\varphi(\xi), \qquad \xi \in \Gamma(E),\ f \in A^0(M)$$

が成り立つならば，φ は E から F への写像によって与えられる．すなわち $\varphi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, F))$ と考えられることを証明せよ．

問題 1.2 ∇ と ∇' をベクトル束 E の接続とするとき，その差 $\nabla' - \nabla: \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ は $E^* \otimes E$ に値をとる M 上の 1 次微分形式である．すなわち $\nabla' - \nabla \in A^1(\mathrm{End}\, E)$ であることを証明せよ．(ここで，$\mathrm{End}\, E = \mathrm{Hom}(E, E) = E^* \otimes E$.)

問題 1.3 E の接続 ∇ を

$$E^{(r,s)} = \overset{r}{\otimes} E \overset{s}{\otimes} E^* = E \otimes \cdots \otimes E \otimes E^* \otimes \cdots \otimes E^*$$

に拡張する．$E^{(r,s)}$ の切断 K は各点 $x \in M$ で多重線形写像 $E_x \times \cdots \times E_x \longrightarrow E_x \otimes \cdots \otimes E_x = \overset{r}{\otimes} E_x$ を定義するが，X を M のベクトル場，$\xi_1, \cdots, \xi_s$ を E の切断とするとき，

$$(\nabla_X K)(\xi_1, \cdots, \xi_s) = \nabla_X(K(\xi_1, \cdots, \xi_s)) - \sum_{i=1}^{s} K(\xi_1, \cdots, \nabla_X \xi_i, \cdots, \xi_s)$$

となることを証明せよ．

§2. ベクトル束の曲率

この節でも，M は n 次元多様体，E は M 上のベクトル束でそのファイバーは $\boldsymbol{R}^r$ とする．M 上の p 次微分形式の全体を $A^p(M)$ と書くが，E に値をもつ M 上の p 次微分形式の全体を $A^p(E)$ と書くことにする．すなわち，

$$(2.1)\quad A^p(M)=\Gamma(\wedge^p T^*M),\qquad A^p(E)=\Gamma(\wedge^p T^*M\otimes E).$$

外積によって写像

$$A^q(M)\times A^p(E)\longrightarrow A^{p+q}(E)$$

が定義される．

いま，E に接続 ∇ が一つ与えられているとする．それは線形写像

$$\nabla:\Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(T^*M\otimes E)$$

で，Leibniz の公式 (1.2) を満たすものであった．この接続 ∇ はベクトル束 $T^*M\otimes E$ に接続を引きおこさない．∇ から共変微分 $\Gamma(T^*M\otimes E)\to\Gamma(T^*M\otimes T^*M\otimes E)$ が自然には生まれないのである．そのためには，E の接続だけでなく，T^*M の接続も必要になる．しかし，∇ は写像 $A^p(E)\to A^{p+1}(E)$ に自然に拡張されることを説明しよう．$A^p(E)$ の元は，$\xi\cdot\theta$ の形の元（ここで，$\xi\in A^0(E)=\Gamma(E)$，$\theta\in A^p(M)$）の和として書けるから

$$(2.2)\qquad D(\xi\cdot\theta)=\nabla\xi\wedge\theta+\xi\cdot d\theta,\qquad \xi\in A^0(E),\ \theta\in A^p(M)$$

によって，写像

$$D:A^p(E)\longrightarrow A^{p+1}(E)$$

を定義する．例えば $p=1$ のとき $\varphi\in A^1(E)$ ならば $D\varphi\in A^2(E)$ は

$$(2.3)\qquad (D\varphi)(X,Y)=\frac{1}{2}\{\nabla_X(\varphi(Y))-\nabla_Y(\varphi(X))-\varphi([X,Y])\},$$
$$X,Y\in\Gamma(TM)$$

で与えられる．これは1章の (2.11) の拡張である．一般の $A^p(E)$ の元に対しても同様の公式が成り立つ．（$D\varphi$ の定義が，φ を $\xi\cdot\theta$ の形の元の和として表わしたときの表わし方に依存しないことを確かめるには，(2.3) およびその高

次の場合の公式を使うのが便利であろう.）(2.2) により定義された微分作用素を **共変外微分** (covariant exterior differentiation) と呼ぶ. $\xi \in A^0(E)$ に対しては $D\xi = \nabla\xi$ である.

次の公式は容易に確かめられる.

(2.4) $$D(\varphi \wedge \theta) = D\varphi \wedge \theta + (-1)^p \varphi \wedge d\theta, \quad \varphi \in A^p(E),\ \theta \in A^q(M).$$

通常の外微分 d は $dd = 0$ という性質をもっていた. (2.2) にさらに D を作用させると, ($\nabla\xi = D\xi$ に注意して)

(2.5) $$\begin{aligned} D^2(\xi \cdot \theta) &= D^2\xi \wedge \theta - D\xi \wedge d\theta + D\xi \wedge d\theta + \xi d^2\theta \\ &= D^2\xi \wedge \theta \end{aligned}$$

を得る. したがって, D^2 を調べるには, $A^0(E)$ の元 ξ に対して, $D^2\xi$ を調べればよい. 後にわかるように, 一般には $D^2 \neq 0$ である. まず, $D^2 : A^0(E) \to A^2(E)$ は, 微分を含まない代数的作用素であること, 詳しくいえば D^2 は, ベクトル束 $\mathrm{End}\, E = E \otimes E^*$ に値をもつ 2 次微分形式, すなわち $A^2(\mathrm{End}\, E)$ の元であることを証明しよう (問題 1.1 を参照). (2.5) で θ を関数 f とすれば

(2.6) $$D^2(f\xi) = fD^2\xi, \qquad \xi \in A^0(E),\ f \in A^0(M).$$

したがって, M の 1 点 x で $\xi_x = 0$ ならば, $(D^2\xi)_x = 0$ となるから, 一般に $\xi, \eta \in A^0(E)$ が $\xi_x = \eta_x$ を満たすならば, $(D^2\xi)_x = (D^2\eta)_x$ である. すなわち, $(D^2\xi)_x$ は ξ の近傍の様子や ξ の微係数に依存せず, ξ_x だけできまるから, 各点 x で D^2 は線形写像 $D^2 : E_x \longrightarrow \wedge^2 T^*M \otimes E_x$ を定義する.

(2.7) $$R = D^2 \in A^2(\mathrm{End}\, E)$$

とおいて, R を接続 ∇ の **曲率** (curvature) と呼ぶ.

(2.3) で $\varphi = D\xi$ とおいて $D^2\xi$ を計算すると,

(2.8) $$R(X, Y)\xi = \frac{1}{2}(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\xi$$

となる. これを **Ricci の恒等式** (Ricci's identity) と呼ぶ.

E の局所標構場 $e_1, \cdots, e_r$ に対する R の作用を計算することにより，R を 2 次微分形式の行列として表わせる．$e_1, \cdots, e_r$ に関する接続形式を $\omega = (\omega_\lambda{}^\mu)$ とすると

$$D^2 e_\lambda = D(\sum \omega_\lambda{}^\mu e_\mu) = \sum d\omega_\lambda{}^\mu e_\mu - \sum \omega_\lambda{}^\mu \wedge De_\mu$$
$$= \sum (d\omega_\lambda{}^\mu - \sum \omega_\lambda{}^\nu \wedge \omega_\nu{}^\mu) e_\mu$$

だから

$$\Omega_\lambda{}^\mu = d\omega_\lambda{}^\mu - \sum \omega_\lambda{}^\nu \wedge \omega_\nu{}^\mu = d\omega_\nu{}^\mu + \sum \omega_\nu{}^\mu \wedge \omega_\lambda{}^\nu \tag{2.9}$$

と定義すれば

$$Re_\lambda = \sum \Omega_\lambda{}^\mu e_\mu \tag{2.10}$$

を得る．(2.9) を接続 ∇ の **構造方程式** (structure equation) と呼ぶ．行列の記号を使って，構造方程式を

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \tag{2.11}$$

と書いておこう．$\Omega = (\Omega_\lambda{}^\mu)$ を ∇ の **曲率形式** (curvature form) と呼ぶ．

標構を (1.10) により $e_1, \cdots, e_r$ から $e'_1, \cdots, e'_r$ に変換すると，接続形式 ω は (1.13) により

$$\omega' = a^{-1}\omega a + a^{-1} da \tag{2.12}$$

に変わった．そのとき，ω' に対応する曲率形式 Ω' を (2.11) と (2.12) を使って計算すると

$$\begin{aligned}\Omega' = d\omega' + \omega' \wedge \omega' &= -a^{-1}da \wedge a^{-1}\omega a \\ &\quad + a^{-1}d\omega a - a^{-1}\omega da - a^{-1}da \wedge a^{-1}da \\ &\quad + (a^{-1}\omega a + a^{-1}da) \wedge (a^{-1}\omega a + a^{-1}da) \\ &= a^{-1}(d\omega + \omega \wedge \omega)a = a^{-1}\Omega a,\end{aligned}$$

すなわち，

$$\Omega' = a^{-1}\Omega a \tag{2.13}$$

となる．これは曲率 R が $A^2(\mathrm{End}\, E)$ の元であるということから，計算しなくてもわかることである．(1.14) におけるように，E の U_α 上の標構 $e_1{}^{(\alpha)}, \cdots, e_r{}^{(\alpha)}$ に対する接続形式を ω_α，曲率形式を Ω_α とすると，変換関数 $\psi_{\alpha\beta}$ を使って

$U_\alpha \cap U_\beta$ 上で

(2.14)
$$\Omega_\beta = {\psi_{\alpha\beta}}^{-1}\Omega_\alpha \psi_{\alpha\beta}$$

と書ける.

(1.21) で説明したように，E の接続 ∇ は End E にも接続 ∇ を定義する．したがって，$D: A^p(\mathrm{End}\, E) \to A^{p+1}(\mathrm{End}\, E)$ も定義される．特に，曲率 R は $A^2(\mathrm{End}\, E)$ の元だから $DR \in A^2(\mathrm{End}\, E)$ も定義される．DR を計算するために，$\xi \in A^0(E)$ に対し $D^3\xi$ を二通りに計算して結果を比べる．(2.5) によれば

(2.15)
$$D^2\varphi = R \wedge \varphi\,, \qquad \varphi \in A^p(E).$$

これを $\varphi = D\xi$ に適用して，

$$D^2(D\xi) = R \wedge D\xi\,.$$

他方，(1.21) を使って

$$D(D^2\xi) = D(R\xi) = DR\cdot\xi + R \wedge D\xi\,.$$

したがって，次の **Bianchi の恒等式** (Bianchi's identity) を得る.

(2.16)
$$DR = 0\,.$$

接続を局所標構場 $e_1, \cdots, e_r$ を使い，接続形式で表わした場合には構造方程式 (2.11) を外微分して，

$$d\Omega = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega = -\omega \wedge \omega \wedge \omega + \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

したがって，Bianchi の恒等式を次の形で得る.

(2.17)
$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0\,.$$

前節の終りで考えたように，M 上に二つのベクトル束 E, E' があり，それぞれに接続 ∇, ∇' が入っていて，その曲率が R, R' であるとする．そのとき，$\nabla \oplus \nabla'$ の曲率が

(2.18)
$$R \oplus R'$$

で与えられることは明らかである．(1.17) の場合と同じ記号を使えば，曲率形

式の行列は

$$\begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega' \end{pmatrix}$$

の形になることも明らかであろう.

同様に $E \otimes E'$ に対しては，その接続 $\nabla \otimes I_{E'} + I_E \otimes \nabla'$ を ∇'' と書き，対応する共変外微分を D'' とすると，∇'' の曲率 R'' は次の計算によって得られる.

$$\begin{aligned} R''(\xi \otimes \xi') &= D'' D''(\xi \otimes \xi') = D''(D\xi \otimes \xi' + \xi \otimes D'\xi') \\ &= DD\xi \otimes \xi' - D\xi \otimes D'\xi' + D\xi \otimes D'\xi' + \xi \otimes D'D'\xi' \\ &= R\xi \otimes \xi' + \xi \otimes R'\xi'. \end{aligned}$$

したがって

(2.19) $$R'' = R \otimes I_{E'} + I_E \otimes R'$$

を得る.

双対ベクトル束 E^* に (1.20) により接続が定義されたが，その曲率 R^* を計算するには (1.20) の外微分をとればよい.

$$0 = \langle DD\xi^*, \xi\rangle - \langle D\xi^*, D\xi\rangle + \langle D\xi^*, D\xi\rangle + \langle \xi^*, DD\xi\rangle,$$

したがって

(2.20) $$0 = \langle R^*\xi^*, \xi\rangle + \langle \xi^*, R\xi\rangle,$$

すなわち

(2.21) $$R^* = -{}^t R$$

を得る.

M 上のベクトル束 E と写像 $f: M' \to M$ から誘導されたベクトル束 $E' = f^*E$ に接続 $\nabla' = f^*\nabla$ が誘導されるが（(1.22) 参照），∇' の曲率形式 $\{\Omega'_\alpha\}$ は ∇ の曲率形式 $\{\Omega_\alpha\}$ を f で引き戻すことによって得られる．すなわち，

(2.22) $$\Omega'_\alpha = f^*\Omega_\alpha.$$

∇ の曲率 $R \in A^2(\mathrm{End}\, E)$ と ∇' の曲率 $R' \in A^2(\mathrm{End}\, E')$ は次の可換な図式で結ばれているといってもよい.

$$
(2.23)\qquad \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{R'(X',Y')} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{R(f_*X',f_*Y')} & E \end{array}, \qquad X',Y' \in T_{x'}M'
$$

問題 2.1 E の接続 ∇ の曲率 R が 0 ならば，適当に局所標構 $e_1, \cdots, e_r$ をとれば $\nabla e_1 = \cdots = \nabla e_r = 0$ となることを証明せよ．（このとき対応する接続形式 $(\omega_\mu{}^\lambda)$ は 0 となる.)

問題 2.2 E の接続 ∇ の曲率を R とすると $\det E (= \wedge^r E)$ に自然に定義される接続の曲率は $\mathrm{tr}\,(R)$ で与えられることを証明せよ．

§3. 内積をもったベクトル束

この節でも，M は n 次元多様体，E は M 上のベクトル束で，そのファイバーは $\boldsymbol{R}^r$ とする．さらに，E のファイバーに内積 g が入っているとする．すなわち，各点 $x \in M$ でファイバー E_x に内積

$$
(3.1)\qquad g_x : E_x \times E_x \longrightarrow \boldsymbol{R}
$$

が与えられていて，g_x は x に関して微分可能とする．（この最後の条件は，微分可能な切断 $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対し，$g(\xi, \eta)$ が M 上の関数として微分可能ということである.)

E が接ベクトル束 TM の場合には，そのような内積 g を M の **リーマン計量** (Riemannian metric)，そして (M, g) を **リーマン多様体** (Riemannian manifold) と呼ぶが，これについては次章で論ずる．

E の接続 ∇ が

$$
(3.2)\qquad d(g(\xi,\eta)) = g(\nabla\xi,\eta) + g(\xi,\nabla\eta), \qquad \xi,\eta \in \Gamma(E)
$$

なる条件を満たすならば，**∇ は g を保つ**，あるいは g は（∇ に関して）**平行である** (parallel) という．(3.2) の意味は次のように理解するとよい．まず，g

をベクトル束 $E^*\otimes E^*$ の切断と考える．§1の最後に説明したように，∇ は $E^*\otimes E^*$ にも接続を定義する．そして ∇ が E の一般の接続ならば ∇g は次の式で与えられる．

$$d(g(\xi,\eta)) = (\nabla g)(\xi,\eta)+g(\nabla\xi,\eta)+g(\xi,\nabla\eta). \tag{3.3}$$

（もし，(3.2) や (3.3) のような計算に抵抗を感じるならば，左辺の d をベクトル場 X で右辺の ∇ を ∇_X でおきかえてみるとよい）．(3.3) は ∇ に何も条件がないときの一般の式であるから，(3.2) は条件

$$\nabla g = 0 \tag{3.4}$$

と同じである．これは，g が共変微分 ∇ に関しては定数のようなものだということである．

E に内積 g が与えられている場合には，局所標構 $e_1,\cdots,e_r$ として正規直交 (orthonormal) なものを使うのが自然である．

$$g(e_\lambda, e_\mu) = \delta_{\lambda\mu} \tag{3.5}$$

を (3.2) を使って微分すると

$$0 = g(\nabla e_\lambda, e_\mu)+g(e_\lambda,\nabla e_\mu) = \sum (g(\omega_\lambda{}^\nu e_\nu, e_\mu)+g(e_\lambda, \omega_\mu{}^\nu e_\nu)),$$

したがって

$$\omega_\lambda{}^\mu + \omega_\mu{}^\lambda = 0 \tag{3.6}$$

を得る．すなわち，接続形式 $\omega=(\omega_\mu{}^\lambda)$ は交代行列に値をとる．1次微分形式である．（後に，もっと広い立場から接続を考えると，これは ω が直交群 $O(r)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ に値をとるという形に述べられることがわかる）．

$e_1,\cdots,e_r$ を他の正規直交標構 $e'_1,\cdots,e'_r$ に変換するとき，変換

$$e'_\lambda = \sum a_\lambda{}^\mu e_\mu \tag{3.7}$$

の行列 $a=(a_\lambda{}^\mu)$ は直交群 $O(r)$ に属する．$e'_1,\cdots,e'_r$ に関する接続形式を $\omega'=(\omega'_\mu{}^\lambda)$ とすると，(1.13) で証明したように

$$\omega' = a^{-1}\omega a + a^{-1}da \tag{3.8}$$

が成り立つ．上の式について，$a^{-1}\omega a$ も $a^{-1}da$ も交代行列であることに注意

しておく.

M を $\{U_\alpha\}$ で覆い, 各 U_α 上に正規直交標構 $e_1^{(\alpha)}, \cdots, e_r^{(\alpha)}$ をえらべば, E の変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ (1章 §1 を参照) は直交群 $O(r)$ に値をもつ. すなわち,

(3.9) $$\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow O(r).$$

そして, 内積 g を保つ E の接続 ∇ は各 U_α 上に交代行列となる接続形式 $\{\omega_\alpha\}$ を定義し

(3.10) $$\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}{}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}{}^{-1}d\psi_{\alpha\beta} \qquad (U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上で})$$

となる. 逆にそのような $\{\omega_\alpha\}$ が g を保つ接続 ∇ を定義することは (1.14), (1.15) の議論と同様にして証明される.

内積 g の与えられたベクトル束 E に, g を保つ接続の存在することは (1.6) と同様にして証明される.

(3.2) の外微分を (1.20) から (2.20) を導いたのと同様に計算すると曲率 R に対する次の式を得る.

(3.11) $$g(R\xi, \eta) + g(\xi, R\eta) = 0$$

すなわち, 内積 g に関して, R は交代である. これは正規直交の $e_1, \cdots, e_r$ に関して, 曲率形式の行列 $\Omega = (\Omega_\mu{}^\lambda)$ が交代, すなわち

(3.12) $$\Omega_\mu{}^\lambda + \Omega_\lambda{}^\mu = 0$$

であることを示している. これはもちろん ω が交代であること (3.6) と構造方程式 ((2.9) と (2.11) 参照) からもわかる.

問題 3.1 内積をもったベクトル束 (E, g), (E', g') が与えられたとき, その直和 $E \oplus E'$, テンソル積 $E \otimes E'$ 等に g と g' からつくられた内積が入り, g, g' を保つ E, E' の接続 ∇, ∇' から (1.16), (1.18) の式で $E \oplus E'$, $E \otimes E'$ の内積を保つ接続が得られることを確かめる.

問題 3.2 (E, g) から, E の双対ベクトル束 E^* に自然に内積 g^* がつくられ, g を保つ E の接続 ∇ は (1.20) により, g^* を保つ E^* の接続 ∇ を引きおこすことを確かめよ.

§4. 主ファイバー束

この節でも M は n 次元多様体，E は M 上のベクトル束でファイバーは $\boldsymbol{R}^r$ とする．いままでは局所的に一つの標構 $e_1, \cdots, e_r$ をえらび，それに関して接続形式，曲率形式を書き表わしてきたが，E の標構をすべて同時に考えると主ファイバー束の概念に到達するのである．

まず，E から**主ファイバー束** (principal fiber bundle) P をつくろう．点 $x \in M$ を固定し，x でのファイバー E_x の基 $e_1, \cdots, e_r$ を全部考え，その集合を P_x と書く．いま $\boldsymbol{R}^r$ の自然な基を $b_1 = (1, 0, \cdots, 0)$，$\cdots$，$b_r = (0, \cdots, 0, 1)$ とすると，E_x の基 $e_1, \cdots, e_r$ をえらぶのは，同型写像

(4.1) $$u : \boldsymbol{R}^r \longrightarrow E_x$$

を $u(b_\lambda) = e_\lambda$ となるようにえらぶのと同じことである．したがって，P_x は同型写像 (4.1) の全体と考えられる．すなわち，

(4.2) $$P_x = \{u : \boldsymbol{R}^r \to E_x\,;\ \text{同型写像}\}.$$

一つ E_x の基を固定すると，その線形変換により E_x のすべての基が得られるから，P_x は群 $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ と 1 対 1 に対応する．しかし，これは一つの基をえらんだ上でつけた対応だから自然な対応とはいえない．したがって，P_x には自然に群構造が入るわけではない．E_x の基を (4.1) のように同型写像 $u : \boldsymbol{R}^r \to E_x$ と考えて，以上のことをいいかえると，一つ $u_0 : \boldsymbol{R}^r \to E_x$ を固定したとき，他の $u : \boldsymbol{R}^r \to E_x$ は

(4.3) $$u = u_0 \circ a, \qquad a \in GL(r\,;\boldsymbol{R})$$

の形に $a : \boldsymbol{R}^r \to \boldsymbol{R}^r$ と $u_0 : \boldsymbol{R}^r \to E_x$ の合成として得られる．また，対応 $a \in GL(r\,;\boldsymbol{R}) \longrightarrow u = u_0 \circ a \in P_x$ は 1 対 1 だが，u_0 のえらび方に依存する．

次に，

(4.4) $$P = \bigcup_{x \in M} P_x$$

と定義し，P に多様体の構造を入れる．それには M の座標近傍 U 上に E の

標構場 $e_1, \cdots, e_r$ をとる．これを σ_U と書く．各 $x \in U$ で $\sigma_U(x)$ は (4.1) の意味で同型写像

$$(4.5) \qquad \sigma_U(x) : \boldsymbol{R}^r \longrightarrow E_x$$

を定義する．σ_U を使って1対1の対応

$$(4.6) \qquad \varphi_U : \bigcup_{x \in U} P_x \longrightarrow U \times GL(r\,;\boldsymbol{R}), \qquad \sigma_U(x) \circ s \longmapsto (x, s)$$

を定義する．$U \times GL(r\,;\boldsymbol{R})$ の多様体構造を $\bigcup_{x \in U} P_x$ に移すことにより P に多様体構造を入れる．射影 $\pi : P \to M$ を $\pi(P_x) = x$ で定義する．ここに構成された P は次に定義する主ファイバー束の一例である．

一般に G を Lie 群とする．(Lie 群とは多様体であると同時に，群であり，群の作用，すなわち，積 $G \times G \to G$，逆元をとる作用 $G \to G$ が共に微分可能な写像であるものに過ぎない．Lie 群に慣れていない読者は，以下 G は $GL(r\,;\boldsymbol{R})$，$O(r)$，$U(r)$ 等，行列でつくられる古典群だと思ってよい)．

Lie 群 G を**構造群** (structure group) とする M 上の**主ファイバー束** (principal fiber bundle) P とは次の性質をもつ多様体のことである．

（i）　まず，微分可能な写像 $\pi : P \to M$ が与えられていて

$$\pi(P) = M\,;$$

（ii）　群 G が P に右から作用している．すなわち，微分可能な写像

$$P \times G \longrightarrow P, \qquad (u, s) \longmapsto u \cdot s$$

が与えられていて，

$$(us)s' = u(ss'), \qquad u \in P,\ s, s' \in G\,,$$

$$u \cdot e = u \qquad (e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

が成り立っている．さらに，この作用は次の条件を満たす．

(ii.a)　$\pi(us) = \pi(u)$，すなわち，G は $\pi^{-1}(x)$ を $\pi^{-1}(x)$ に移す．

(ii.b)　$\pi(u) = \pi(u')$ ならば，$u' = us$ となる G の元 S がちょうど一つある．（これを，G が $\pi^{-1}(x)$ 上に**単純推移的** (simply transitive) であるという.）

(iii)　M に開被覆 $\{U_\alpha\}$ があり，各 U_α 上に微分可能切断 $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha) \subset P$ が存在する．(切断の定義により，すべての $x \in U_\alpha$ に対し，$\pi(\sigma_\alpha(x)) = x$.)

以上のようなときに (P, M, π, G)，あるいは単に P は G を構造群とする主ファイバー束，または簡単に**主 G 束** (principal G-bundle) とか **G 束** (G-bundle) であるという．また，

$$P_x = \pi^{-1}(x)$$

と書いて，P_x を P の x 上の**ファイバー**と呼ぶ．G の P 上の作用により G の各元 s は P の変換 $u \mapsto us$ を与えるが，これを R_s と書くこともある．すなわち

$$R_s u = us, \qquad u \in P,\ s \in G$$

(ここで，R_s は s による**右移動** (right translation) の意味である)．

以下，P は M 上の主 G 束とする．M を座標近傍系 $\{U_\alpha\}$ で覆い，各 U_α に対し (4.6) のように同型対応

$$\text{(4.7)} \qquad \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G, \qquad \sigma_\alpha(x)s \mapsto (x, s)$$

を定義することにより，局所的には (すなわち U_α 上では) P は直積 $U_\alpha \times G$ であることがわかる．また $U_\alpha \cap U_\beta$ 上では，

$$\text{(4.8)} \qquad \sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\,\psi_{\alpha\beta}(x), \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

により $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ を定義し，$\psi_{\alpha\beta}$ を P の**変換関数** (transition function) と呼ぶのは，1 章の (1.4) と同様である．明らかに

$$\text{(4.9)} \qquad \psi_{\alpha\beta}(x)\,\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x), \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

が成り立つ．

一番簡単な主 G 束は直積 $P = M \times G$ である．一般の主 G 束は局所的に，すなわち各 U_α 上で直積 $U_\alpha \times G$ であり，それらを $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ によってねじってつないだものと理解すればよい．

我々は，M 上のベクトル束 E から，(4.2)～(4.6) によって $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ を構造群とする主ファイバー束 P をつくった．これを E に **同伴する** (associated) 主ファイバー束と呼ぶ．

逆に主ファイバー束 P とその構造群 G の表現 $\rho : G \to GL(r\,;\boldsymbol{R})$ が与えられると，$\boldsymbol{R}^r$ をファイバーとするベクトル束 E が

$$E = P \times_\rho \boldsymbol{R}^r \tag{4.10}$$

によって定義される．(4.10) の右辺の意味を説明する．群 G を $P \times \boldsymbol{R}^r$ に

$$s : (u, y) \longmapsto (us, \rho(s)^{-1}y), \qquad s \in G,\ (u, y) \in P \times \boldsymbol{R}^r \tag{4.11}$$

で作用させ，商空間 $(P \times \boldsymbol{R}^r)/G$ を $P \times_\rho \boldsymbol{R}^r$ と書く．すなわち，$P \times G$ において (u, y) と $(us, \rho(s)^{-1}y)$ を同一視するのである．$P \times_\rho \boldsymbol{R}^r$ がベクトル束になることは，P を局所的に直積 $U \times G$ としたときに写像

$$U \times \boldsymbol{R}^r \longrightarrow U \times G \times \boldsymbol{R}^r, \qquad (x, y) \mapsto (u, 1_G, y)$$

が 1 対 1 の対応 $U \times \boldsymbol{R}^r \longrightarrow (U \times G) \times_\rho \boldsymbol{R}^r$ を引きおこすことから明らかであろう．

P をベクトル束 E から (4.2)～(4.6) でつくった主 $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ 束とする．種種の表現 $\rho : GL(r\,;\boldsymbol{R}) \to GL(N\,;\boldsymbol{R})$ をえらぶことによりいろいろなベクトル束 $P \times_\rho \boldsymbol{R}^N$ を得る．$\rho : GL(r\,;\boldsymbol{R}) \to GL(r\,;\boldsymbol{R})$ を恒等写像とすれば元のベクトル束 E を得る．$\rho(s) = {}^t s^{-1}$ とすれば双対ベクトル束 E^* を得る．$\rho(s) = s \otimes s$ とすれば，$E \otimes E$ を得る．これらの事実を確かめるのは読者にまかせる．

以上のように，P から G の表現 ρ によってつくられるベクトル束を P に **同伴するベクトル束** (associated vector bundle) と呼ぶ．

M の被覆 $\{U_\alpha\}$ に関する P の変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を使えば，$E = P \times_\rho \boldsymbol{R}^r$ は変換関数 $\{\rho \circ \psi_{\alpha\beta}\}$ によって与えられるベクトル束であることも，つくり方から容易にわかる．

いま，ベクトル束 E に前節の意味で内積 $\mathfrak{g}$ が与えられているとする．その

とき，各 $x \in M$ に対し，E_x の正規直交基 $e_1, \cdots, e_r$ の全体を Q_x,

$$Q = \bigcup_{x \in M} Q_x \tag{4.12}$$

とする．(4.1) および (4.2) のように Q_x は同型写像 $u : \boldsymbol{R}^r \to E_x$ で ($\boldsymbol{R}^r$ の自然の内積，E_x の内積 g_x に関して) 等長変換，すなわち内積を保つものの集合である．(4.2) ～ (4.6) と同様にして，Q は直交群 $O(r)$ を構造群とする M 上の主ファイバー束になる．Q は P の部分束で，P の構造群 $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ を部分群 $O(r)$ に縮小して得られたという．($O(r)$ は $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ の極大コンパクト部分群である．一般に，K を G の極大コンパクト部分群とすると，主 G 束 P は K を構造群とする部分主ファイバー束 Q に縮小できる．しかし，この様な一般論はここではしない．)

後に主ファイバー束の接続で必要となる基本ベクトル場なるものを定義しておく．Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする．$GL(r\,;\boldsymbol{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{R})$ は $r \times r$ の行列の全体である．$O(r)$ の Lie 環は r 次の交代行列の全体である．ユニタリ群 $U(r)$ の Lie 環は r 次の歪 Hermite 行列の全体である．ここで Lie 環の求め方を簡単に説明しておこう．一般に G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は G の単位元 e における接空間と考える．(G の左不変ベクトル場の全体と考えても同じである．) いま，$a(t)$ を G の中の曲線で $a(0) = e$ とするとき，$t = 0$ における接ベクトル $a'(0) = \left(\dfrac{da}{dt}\right)_{t=0}$ として Lie 環の元が得られる．例えば $O(r)$ の場合には，

$$^t a(t)\, a(t) = I \tag{4.13}$$

を微分して $^t a'(t)\, a(t) + {}^t a(t)\, a'(t) = 0$, そして $t = 0$ とおいて

$$^t a'(0) + a'(0) = 0 \tag{4.14}$$

を得る．すなわち，$a'(0)$ は交代行列である．ユニタリ群 $U(r)$ の場合は読者にまかせる．

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 A が与えられたとき，A によって生成される G の 1 助変数部分群を e^{tA} あるいは $\exp tA$ と書く．これは微分方程式

$$\frac{d}{dt} a(t) = a(t)\, A, \qquad a(0) = 1_G \tag{4.15}$$

の解である．G が $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ や $O(r)$ のように行列群の場合には，(4.15) の解 $a(t)=e^{tA}$ は行列の巾級数

$$e^{tA}=I+tA+\frac{t^2A^2}{2!}+\frac{t^3A^3}{3!}+\cdots \tag{4.16}$$

で与えられることは (4.16) を微分して確かめられる．

さて，P は主 G 束とする．各 $A\in\mathfrak{g}$ の生成する 1 助変数部分群 e^{tA} を P に (右から) 作用させる．各 $u\in P$ に対し，軌道 ue^{tA} の $t=0$ における (すなわち，u における) 接ベクトルを $A^*_u\in T_uP$ とする．こうしてできた P 上のベクトル場 A^* を $A\in\mathfrak{g}$ に対応する**基本ベクトル場** (fundamental vector field) と呼ぶ．

以上のことをもう少し形式的に説明してみよう．一般に多様体 V, W 間の写像 $f: V\to W$ は微分写像 $f_*: TV\to TW$ を引きおこす．特に，G の積を定義する写像 $G\times G\to G$ を微分して得る写像 $TG\times TG\to TG$ によって，TG も群になる．G は TG の 0 ベクトルの全体として TG の部分群，$\mathfrak{g}$ は G の単位元における接空間として TG の部分群と考えられる．したがって，$s\in G$ および $A\in\mathfrak{g}$ に対し，$sA\in TG$ は意味がある．G の P に対する作用を定義する写像 $P\times G\to P$ を微分して得る写像 $TP\times TG\to TP$ により群 TG は TP に作用する．したがって $A\in\mathfrak{g}\subset TG$ および $u\in P\subset TP$ に対し，$uA\in TP$ は意味がある．定義から，

$$A^*_u=uA \tag{4.17}$$

であることは容易にわかる．このような形式的な考え方は計算上便利である．

問題 4.1　Lie 群 G に対し，次のような完全系列

$$0\longrightarrow\mathfrak{g}=T_eG\longrightarrow TG\longrightarrow G\longrightarrow 0$$

が分裂 (split) することを確かめよ．

問題 4.2　P が M 上の主 G 束ならば，TP が TM 上の主 TG 束であることを証明せよ．

問題 4. 3　G を Lie 群，H をその閉じた Lie 部分群とする．すなわち，閉部分多様体で同時に部分群になっているとする．(実際には，G の閉部分群は Lie 部分群になることが知られている．) 商空間 G/H に商位相を入れ，$\pi : G \to G/H$ を自然な射影とする．(π は $a \in G$ に $aH \in G/H$ を対応させる．) G の単位元 e の近傍 U 内の部分多様体 S が次の条件を満たしているとする．

(i)　$e \in S$

(ii)　S は部分多様体 $H \subset G$ と e で横断的に交わる．すなわち，交点 e で $T_e G = T_e S \oplus T_e(H)$ となる．(このような S の存在は知られているが，ここでは仮定する．)

このとき，G/H には π が微分可能な写像であるように自然に多様体の構造が入ることを証明せよ．次に，G が G/H を底，H を構造群とする主ファイバー束になることを証明せよ．

問題 4. 4　$G = SO(n+1)$，$H = SO(n)$，ここで $a \in SO(n)$ を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in SO(n+1)$ に対応させ，H を G の部分群とみなす．このとき問題 4.3 の条件 (i)，(ii) を満たすような S が存在することを示せ．また $SO(n+1)/SO(n)$ が n 次元の単位球 $S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ に同相であることを確かめよ．

§5. 主ファイバー束の接続

この節では，P は Lie 群 G を構造群とする M 上の主ファイバー束とする．しかし，$G = GL(r\,;\boldsymbol{R})$，$O(r)$ 等の場合を考えれば充分である．

§1 で学んだように，ベクトル束 E の接続は，M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を使えば，U_α 上の行列値の (すなわち $\mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{R})$ に値をとる) 1 次微分形式 ω_α で関係式

$$\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}{}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}{}^{-1}d\psi_{\alpha\beta} \qquad (U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上で}) \tag{5.1}$$

を満たすもので与えられる ((1.14) 参照)．この定義では，ベクトル束 E は姿を消してしまい，群 $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ に値をとる変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ と Lie 環 $\mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{R})$ に値をとる 1 次微分形式 $\{\omega_\alpha\}$ だけで述べられている．

したがって，一般の主 G 束 P に対しても接続を Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をもつ U_α 上

の1次微分形式 ω_α で関係式 (5.1) で結ばれるものとして定義することができる. ($\psi_{\alpha\beta}{}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta}$ の代わりに $Ad(\psi_{\alpha\beta}{}^{-1})\omega_\alpha$ と書くのが普通だが, 前節の最後に説明したように, G も $\mathfrak{g}$ も TG の部分群とみなせば, $s\in G$, $A\in\mathfrak{g}$ に対し $s^{-1}As$ と書いても意味があるから, G が行列群でなくても我々は $\psi_{\alpha\beta}{}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta}$ と書くことにする.)

各 ω_α は U_α 上の微分形式であるが, M 全体では定義されていない. 我々は $\{\omega_\alpha\}$ から, (M 上ではないが) P 上で定義された $\mathfrak{g}$ 値の1次微分形式 ω をつくる. そのためには $\pi^{-1}(U_\alpha)\subset P$ 上に $\mathfrak{g}$ 値の1次微分形式 $\tilde{\omega}_\alpha$ をつくり, $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上で $\tilde{\omega}_\alpha=\tilde{\omega}_\beta$ となることを示せばよい.

(4.7) の $\varphi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times G$ により, 我々は $\pi^{-1}(U_\alpha)$ を直積 $U_\alpha\times G$ とみなす. まず ω_α は, そのまま $U_\alpha\times G$ 上 (あるいは $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上) の微分形式とみなす. (正確には $\pi^*\omega_\alpha$ と書くべきであろう.) 次に, $s_\alpha\in G$ を G 上の座標のように考えて,

$$\tilde{\omega}_\alpha=s_\alpha{}^{-1}\omega_\alpha s_\alpha+s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha \tag{5.2}$$

と定義して, $U_\alpha\times G$ 上の $\mathfrak{g}$ 値の1次微分形式 $\tilde{\omega}_\alpha$ を得る. ここで, $s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha$ の意味は G が $GL(r;\boldsymbol{R})$ とか $O(r)$ の場合には問題はないが, 一般の Lie 環の場合には少々説明が必要であろう. しかしそれは後まわしにして, まず $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上で $\tilde{\omega}_\alpha=\tilde{\omega}_\beta$ となることを確かめておく. $s_\beta=\psi_{\beta\alpha}s_\alpha$ と (5.1) を使い

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_\beta&=s_\beta{}^{-1}\omega_\beta s_\beta+s_\beta{}^{-1}ds_\beta\\&=s_\alpha{}^{-1}\psi_{\beta\alpha}{}^{-1}\omega_\beta\psi_{\beta\alpha}s_\alpha+s_\alpha{}^{-1}\psi_{\beta\alpha}{}^{-1}d\psi_{\beta\alpha}s_\alpha+s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha\\&=s_\alpha{}^{-1}\omega_\alpha s_\alpha+s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha=\tilde{\omega}_\alpha\end{aligned}$$

を得る. したがって, $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上で

$$\omega=s_\alpha{}^{-1}\omega_\alpha s_\alpha+s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha \tag{5.3}$$

とおけば, ω は P 全体で定義された $\mathfrak{g}$ 値の1次微分形式である.

対応 $\varphi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times G$ をみると, 切断 $\sigma_\alpha:U_\alpha\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ に対応

する写像 $U_\alpha \to U_\alpha \times G$ は $x \mapsto (x, e)$ で与えられる (e は G の単位元). すなわち, $s_\alpha = e$ で与えられている. したがって, ω を σ_α で引き戻すには, (5.3) において $s_\alpha = e$ とすればよいから

$$\sigma_\alpha{}^* \omega = \omega_\alpha \tag{5.4}$$

を得る.

ω を特徴づける二つの性質を述べる前に, $s_\alpha{}^{-1} ds_\alpha$ の意味を説明しておく.

一般に Lie 群 G 上に $\mathfrak{g}$ 値の 1 次微分形式 θ を

$$\theta(X) = s^{-1} X, \qquad s \in G, \ X \in T_s G \tag{5.5}$$

と定義する. 明らかに, θ は左不変で, かつ, 単位元 e においては, $X \in T_e G = \mathfrak{g}$ に対し, $\theta(X) = X$ である. 逆に, そのような左不変な 1 次微分形式は (5.5) で与えられることも明らかである. $\mathfrak{g}$ を G 上の左不変なベクトル場の空間とみなせば, θ は

$$\theta(X) = X, \qquad X \in \mathfrak{g} = \{\text{左不変ベクトル場}\} \tag{5.6}$$

でも定義される. この微分形式 θ を **Maurer–Cartan の微分形式** (Maurer–Cartan form) と呼ぶ. $\mathfrak{g}$ の基 $B_1, \cdots, B_m$ をえらび,

$$\theta = \sum \theta^i B_i \tag{5.7}$$

とおく. B_j を左不変ベクトル場とみなすと

$$B_j = \theta(B_j) = \sum \theta^i(B_j) B_i$$

だから,

$$\theta^i(B_j) = \delta^i{}_j \tag{5.8}$$

を得る. すなわち, $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ を左不変な 1 次微分形式の空間と考えたとき, $\theta^1, \cdots, \theta^m$ は $B_1, \cdots, B_m$ に対し双対基になっている. $B_1, \cdots, B_m$ に関する $\mathfrak{g}$ の構造定数を $c^i{}_{jk}$ すなわち

$$[B_j, B_k] = \sum c^i{}_{jk} B_i \tag{5.9}$$

とすると, 1 章の (2.11) を使って

$$d\theta^i = -\frac{1}{2} \sum c^i{}_{jk} \theta^j \wedge \theta^k \tag{5.10}$$

を得る．これを Lie 群 G の **構造方程式** (structure equation) と呼ぶ．(5.10) の代わりに

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] \tag{5.11}$$

と書くときもある．

さて，一般の Lie 群 G の場合，$s \in G$ を変数のように考えたとき，$s^{-1}ds$ は，Maurer–Cartan 微分形式 θ と理解すべきであることは (5.5) から推察できる．$G = GL(r\,;\boldsymbol{R})$ の場合 $s = (s^i{}_j)$ を $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ の座標と考えたとき，$s^{-1}ds$ は $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ 上の行列値 1 次微分形式で左不変である．実際，任意の $a \in GL(r\,;\boldsymbol{R})$ に対し

$$(as)^{-1}d(as) = s^{-1}a^{-1}ads = s^{-1}ds\,.$$

一方，$A = (a^i{}_j) \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{R})$ を単位元 e における接ベクトル $\sum a^i{}_j\left(\frac{\partial}{\partial s^i{}_j}\right)_e$ とみなし，$s^{-1}ds(A)$ を計算すると，$s = e$ では $s^{-1}ds$ は $ds = (ds^i{}_j)$ となるから

$$s^{-1}ds(A) = (a^i{}_j) = A$$

を得る．したがって $s^{-1}ds$ は Maurer–Cartan 微分形式 θ と考えるべきである．

いよいよ (5.3) で定義された P 上の $\mathfrak{g}$ 値の 1 次微分形式 ω の二つの基本的性質を証明する．一つは G の P に対する作用，一つは $\mathfrak{g}$ の作用との関連である．元 $a \in G$ による P の変換 $u \mapsto ua$ を $R_a : P \to P$ と書くことにした．そのとき

$$R_a{}^*\omega = a^{-1}\omega a\,, \qquad a \in G \tag{5.12}$$

が成り立つ．これは (5.3) で s_α を $s_\alpha a$ でおき代えるだけのことである．(形式的には，a は固定した元であることに注意すれば $(s_\alpha a)^{-1}d(s_\alpha a) = a^{-1}(s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha)a$ であるが，$s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha$ を Maurer–Cartan 微分形式 θ と書いたとき，$R_a{}^*\theta = a^{-1}\theta a$ は (5.5) から証明される．)

次に，元 $A \in \mathfrak{g}$ をとる．前節 (4.15)～(4.17) で説明したように 1 助変数部分群 e^{tA} の作用が P 上にベクトル場 A^* を引きおこす．ω の第二の基本的性質

は次の式である.

(5.13)　　$$\omega(A^*)=A,\qquad A\in\mathfrak{g}.$$

これを証明するには，A^* はファイバーに沿ったベクトル場であることに注意する．ω_α は U_α 上の微分形式だから

$$s_\alpha^{-1}\omega_\alpha(A^*)s_\alpha=0.$$

したがって

$$s_\alpha^{-1}ds_\alpha(A^*)=A$$

を確かめればよい．上で説明したように，$s_\alpha^{-1}ds_\alpha$ は Maurer–Cartan 微分形式であるから，これは (5.6) にほかならない．

逆に，P 上に $\mathfrak{g}$ 値の 1 次微分形式 ω が与えられていて，(5.12) と (5.13) が成り立っていると仮定する．U_α 上の切断 σ_α を使って

(5.14)　　$$\omega_\alpha=\sigma_\alpha{}^*\omega$$

と定義すると，$\{\omega_\alpha\}$ は関係式 (5.1) を満たすことを証明しよう．(4.8) により

$$\sigma_\beta=\sigma_\alpha\cdot\psi_{\alpha\beta}.$$

したがって，$x\in U_\alpha\cap U_\beta$，$X\in T_xM$ に対し

(5.15)　　$$\omega_\beta(X)=\sigma_\beta{}^*\omega(X)=\omega(\sigma_{\beta*}X)=\omega((\sigma_\alpha\cdot\psi_{\alpha\beta})_*X).$$

ここで $(\sigma_\alpha\cdot\psi_{\alpha\beta})_*X$ を計算するため，X を $t=0$ での接ベクトルとする曲線 x_t をえらぶ．そのとき

(5.16)　　$$\begin{aligned}(\sigma_\alpha\psi_{\alpha\beta})_*X&=\frac{d}{dt}(\sigma_\alpha(x_t)\,\psi_{\alpha\beta}(x_t))\Big|_{t=0}\\&=\sigma_{\alpha*}(X)\cdot\psi_{\alpha\beta}(x)+\sigma_\alpha(x)\cdot\psi_{\alpha\beta*}(X)\end{aligned}$$

を得る．これは，微分に対する Leibniz の公式である．ここで，$\sigma_{\alpha*}(X)\in T_{\sigma_\alpha(x)}P$，$\psi_{\alpha\beta}(x)\in G$，$\sigma_\alpha(x)\in P$ であり，$\sigma_{\alpha*}(X)\cdot\psi_{\alpha\beta}(x)$ および $\sigma_\alpha(x)\cdot\psi_{\alpha\beta*}(X)$ は，TG の作用 $TP\times TG\to TP$ によって定義されている（前節の最後を参照）．(5.16) の最後の項を書き直して

$$\sigma_\alpha(x)\,\psi_{\alpha\beta*}(X)=\sigma_\beta(x)\,\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1}\psi_{\alpha\beta*}(X).$$

ここで $\psi_{\alpha\beta}{}^{-1}(x)\,\psi_{\alpha\beta*}(X)$ は G の単位元における接ベクトルであるから，

$$A = \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1}\psi_{\alpha\beta *}(X) \in \mathfrak{g}$$

とおけば，(4.17) により

$$\sigma_\alpha(x)\,\psi_{\alpha\beta *}(X) = \sigma_\beta(x)\cdot A = A^*{}_{\sigma_\beta(x)},$$

したがって (5.16) は

$$(\sigma_\alpha\psi_{\alpha\beta})_* X = \sigma_{\alpha *}(X)\,\psi_{\alpha\beta}(x) + A^*{}_{\sigma_\beta(x)}$$

となる．これを (5.15) に代入し，(5.12) と (5.13) を使って

$$\begin{aligned}\omega_\beta(X) &= \omega(\sigma_{\alpha *}(X)\,\psi_{\alpha\beta}(x)) + \omega(A^*{}_{\sigma_\beta(x)})\\ &= \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1}\,\omega(\sigma_{\alpha *}(X))\psi_{\alpha\beta}(x) + A\\ &= (\psi_{\alpha\beta}{}^{-1}(\sigma_\alpha{}^*\omega)\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}{}^{-1}d\psi_{\alpha\beta})(X)\end{aligned}$$

を得る．

以上を要約すると，

(5.17)　**定理**　主ファイバー束 P の接続は構造群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をもつ P 上の 1 次微分形式 ω で次の二条件

$$R_a{}^*\omega = a^{-1}\omega a, \qquad a \in G$$

$$\omega(A^*) = A, \qquad A \in \mathfrak{g}$$

を満たすものにより与えられる．

しばしば，これを P の接続の定義として使う．M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式の族 $\{\omega_\alpha\}$ で定義をする方が P に関する準備をあまりしないでもよいので説明が簡単であるという利点がある．特に，局所的なことを調べるには P 上で計算するより U_α 上でする方がわかりやすい．しかし大域の問題を扱うには P 全体で定義された ω を使う方が便利なことが多いし，また次節との関係からもわかるように，より幾何学的である．(5.17) における ω を **接続微分形式**，あるいは単に **接続形式** (connection form) と呼ぶ．

P の接続の曲率および構造方程式について考える．接続が $\{U_\alpha\}$，$\{\psi_{\alpha\beta}\}$ および $\{\omega_\alpha\}$ で与えられているときには **曲率形式** $\{\Omega_\alpha\}$ を

(5.18) $$\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \qquad (U_\alpha \text{上で})$$

で定義する ((2.9), (2.11) 参照). これは, $\mathfrak{g}$ を行列の Lie 環と考えた式である. 積 $\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$ は外積と行列の積とを併せたものである. $X, Y \in T_x(U_\alpha)$ ならば

$$(\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha)(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega_\alpha(X)\,\omega_\alpha(Y) - \omega_\alpha(Y)\,\omega_\alpha(X))$$
$$= \frac{1}{2}[\omega_\alpha(X), \omega_\alpha(Y)]$$

であるから, 一般の Lie 環の場合には,

(5.19) $$\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha, \omega_\alpha]$$

と定義すべきであるが, 我々は (5.18) を使うことにする. (2.13) および (2.14) で示したように, $\{\Omega_\alpha\}$ は関係式

(5.20) $$\Omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}{}^{-1}\Omega_\alpha \psi_{\alpha\beta}$$

で結ばれている.

ベクトル束 E の接続の曲率 R は, End E に値をとる 2 次微分形式と考えられた. すなわち, $R \in A^2(\mathrm{End}\,E)$. 主ファイバー束の接続の曲率はベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値をもつ 2 次微分形式と考えられることを説明しよう. まず $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ の定義からはじめる. 群 G は Lie 環 $\mathfrak{g}$ に**随伴表現** (adjoint representation)

(5.21) $$Ad\, s \cdot X = sXs^{-1}, \qquad s \in G,\ X \in \mathfrak{g}$$

によって作用している. そのとき, (4.10) で定義したように $\mathfrak{g}$ をファイバーとし P に同伴するベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ が

(5.22) $$P \times_{Ad} \mathfrak{g} = P \times \mathfrak{g}/G$$

として定義される. この右辺は

$$s : (u, X) \longmapsto (us, Ad\, s^{-1} \cdot X), \qquad s \in G,\ (u, X) \in P \times \mathfrak{g}$$

で与えられる G の作用によりつくった商空間である. ベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ の変換関数は $\{Ad\,\psi_{\alpha\beta}\}$ で与えられる. (5.20) から曲率形式 $\{\Omega_\alpha\}$ が $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値をもつ 2 次微分形式を与えることは明らかであろう. これを §2 のように**曲**

率と呼び R で表わす.

(5.23) $$R \in A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}).$$

接続が (5.17) のような P 上の接続形式 ω で与えられている場合を考える. (5.18) のように

(5.24) $$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \quad \left(= d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right)$$

と **曲率形式** Ω を定義する. Ω は P 上の $\mathfrak{g}$ 値2次微分形式である.

ω と ω_α は (5.3) のように

$$\omega = s_\alpha{}^{-1}\omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha$$

で結ばれているが, (2.12) から (2.13) を得た計算と同様にして

(5.25) $$\Omega = s_\alpha{}^{-1}\Omega_\alpha s_\alpha \qquad (\pi^{-1}(U_\alpha) \text{ 上で})$$

を得る. 右辺の Ω_α は正確には $\pi^*\Omega_\alpha$ である. これから, Ω の次の二性質が直ちにわかる.

(5.26) $$R_a{}^*\Omega = a^{-1}\Omega a, \qquad a \in G.$$

V が P のファイバーに沿った接ベクトルならば, P の任意の接ベクトル W に対して次式が成り立つ.

(5.27) $$\Omega(V, W) = 0.$$

P が直積 $M \times G$ のときには, 明白な接続が一つある. M を一つの開集合 $U_\alpha = M$ で覆い, $\omega_\alpha = 0$ とおけば接続が定義され, $\Omega_\alpha = 0$ は明白である. この ω_α に対応する P 上の接続形式 ω は (5.3) により $\omega = s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha$. $s_\alpha{}^{-1}ds_\alpha$ はすでに説明したように (5.5) で定義した Maurer–Cartan 微分形式 θ であった. したがって $p: P \times G \to G$ を自然な射影としたとき

(5.28) $$\omega = p^*\theta$$

である. 群の構造方程式 (5.11) により, この場合には

$$0 = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

となる. このように, P の接続形式 ω は G の Maurer–Cartan 微分形式の一般化, 接続の構造方程式は G の構造方程式の一般化と考えられる.

問題 5.1 G と G' を Lie 群, $\rho: G \to G'$ を準同型写像, $\rho_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ は対応する Lie 環の準同型写像, P を M 上の主 G 束とする. そのとき, M 上の主 G' 束 P' と写像 $\bar{\rho}: P \to P'$ で

$$\bar{\rho}(us) = \bar{\rho}(u)\rho(s), \qquad u \in P, \ s \in G$$

となるものが存在することを示せ. 次に, P に接続形式 ω が与えられたとき, P' に接続形式 ω' が存在して

$$\rho_* \omega = \bar{\rho}^* \omega'$$

となることを証明せよ. また, ω と ω' の曲率形式を Ω, Ω' とすると

$$\rho_* \Omega = \bar{\rho}^* \Omega$$

となることを示せ.

G が G' の部分群で $\rho: G \to G'$ が自然な単射写像であるときには以上のことはどういうことか説明せよ.

問題 5.2 前節の問題 4.3 のように G を G/H 上の主ファイバー束で, 構造群 H とする. G と H の Lie 環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ に対し, $\mathfrak{g}$ のベクトル部分空間 $\mathfrak{m}$ が存在して

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \qquad (Ad\ H)\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$$

となっているとする. ω を G の Maurer-Cartan 形式, そして

$$\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \omega_{\mathfrak{m}}$$

を $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ に対応する分解とする. そのとき, $\omega_{\mathfrak{h}}$ が, 主ファイバー束 G の接続を与えることを証明せよ.

$G = SO(n+1)$, $H = SO(n)$ (問題 4.4 参照) の場合に, この接続の構造方程式を書け.

§6. 主ファイバー束の接続(水平部分空間の方法)

ここでも P は M 上の主ファイバー束, G をその構造群とする. 前節では, 微分形式を使って P の接続を定義した. ここでは, もう少し幾何学的に接続を説明しよう.

各点 $u \in P$ で, ファイバーに沿った接ベクトルの全体を V_u と書く. 射影

$\pi : P \to M$ を使えば

$$V_u = \{X \in T_u P \,;\, \pi_* X = 0\} \tag{6.1}$$

と書ける．この $T_u P$ の部分空間を $T_u P$ の **垂直部分空間** (vertical subspace) と呼ぶ．各 $A \in \mathfrak{g}$ の定義する基本ベクトル場 A^* はいたるところ垂直で

$$V_u = \{A^*{}_u \,;\, A \in \mathfrak{g}\} \tag{6.2}$$

である．(これは，P が局所的に直積 $U_\alpha \times G$ であり，A^* は G の左不変のベクトル場にほかならないことに注意すれば明らかであろう．)

さて，(5.17) のような P 上の接続形式 ω が与えられているとする．ω は $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 次微分形式だから，各点 $u \in P$ で線形写像

$$\omega_u : T_u P \longrightarrow \mathfrak{g} \tag{6.3}$$

を定義する．各 $A \in \mathfrak{g}$ に対し写像 ((5.13) 参照)

$$A \longmapsto A^*{}_u \longmapsto \omega(A^*{}_u) = A$$

を考えることにより $\omega_u : V_u \to \mathfrak{g}$ が単射であることがわかる．一方，$\dim V_u = \dim \mathfrak{g}$ であるから $\omega_u : V_u \to \mathfrak{g}$ は同型対応である．

次に，$T_u P$ の **水平部分空間** (horizontal subspace) H_u を

$$H_u = \{X \in T_u P \,;\, \omega_u(X) = 0\} \tag{6.4}$$

で定義する．$\omega_u : V_u \to \mathfrak{g}$ が同型対応だから

$$T_u P = V_u \oplus H_u \tag{6.5}$$

となる．

$\{V_u \,;\, u \in P\}$ は P のファイバー束としての構造だけできまる **積分可能な接分布** (integrable distribution) で (ファイバーが極大積分多様体である) のに反し，$\{H_u \,;\, u \in P\}$ は接続によってきまる接分布で一般には積分可能でないことに注意する．後でわかるように，水平接分布，$\{H_u \,;\, u \in P\}$ が積分可能ということは ω の曲率が 0 であることと同値になる．

水平接分布 $\{H_u \,;\, u \in P\}$ の基本的性質は G の作用で不変，すなわち

$$R_a(H_u) = H_{ua}, \qquad a \in G \tag{6.6}$$

が成り立つことである．証明は簡単で

$$\omega(R_a X) = (R_a{}^* \omega)(X) = a^{-1}\omega(X)a, \qquad a \in G,\ X \in TP.$$

したがって，$X \in H_u$ ならば $R_a X \in H_{ua}$ で逆も成り立つ．

逆に P に (6.5) と (6.6) を満たす接分布 $\{H_u; u \in P\}$ がえられると，それが水平接分布となるような接続形式 ω がただ一つ定まる．これを証明するためには各 $X \in T_u P$ に対し，$\omega(X) \in \mathfrak{g}$ を定義すればよい．そのために分解 (6.5) を使い

$$X = X^V + X^H, \qquad X^V \in V_u,\ X^H \in H_u$$

と書く．$A \in \mathfrak{g} \longrightarrow A^*{}_u \in V_u$ が同型写像であることにより，$\mathfrak{g}$ の元 A が一意に定まり $X^V = A^*{}_u$ となる．(6.4) と (5.13) を考慮すれば

$$\omega(X) = \omega(X^V) + \omega(X^H) = \omega(A^*{}_u) = A \tag{6.7}$$

と定義するしかない．定義の仕方から (5.13) は成り立っているから，(5.12) だけ確かめればよい．まず，(4.17) により，$A^*{}_u = uA$ であるから

$$R_a A^*{}_u = uAa = ua \cdot a^{-1}Aa = (a^{-1}Aa)^*{}_{ua},$$

したがって，

$$R_a X = R_a X^V + R_a X^H = R_a A^*{}_u + R_a X^H = (a^{-1}Aa)^*{}_{ua} + R_a X^H.$$

(6.6) により $R_a X^H$ は水平，また $(a^{-1}Aa)^*{}_{ua}$ は垂直だから，ω の定義により

$$\omega(R_a X) = a^{-1}Aa = a^{-1}\omega(X)a.$$

これは (5.12) にほかならない．

以上をまとめると

(6.8) **定理** P 上の接続形式 ω に対し，$H_u = \{X \in T_u P; \omega(X) = 0\}$ と定義すると接分布 $\{H_u; u \in P\}$ は条件

$$T_u P = V_u \oplus H_u,$$

$$R_a H_u = H_{ua}, \qquad a \in G$$

を満たす．逆に，上の二条件を満たす接分布 $\{H_u; u \in P\}$ は一意に接続形式 ω を定める（ω は (6.7) によって与えられる）．

(5.24) で曲率形式 Ω を構造方程式によって定義したが, 水平接分布を使えば, 次の式によっても定義できる.

(6.9) $$\Omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H), \qquad X, Y \in T_u P.$$

証明は次の三つの場合に分けて考える. (i) X, Y が共に水平の場合は $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ から明らか. (ii) X, Y が共に垂直の場合, $A, B \in \mathfrak{g}$ で $A^*{}_u = X$, $B^*{}_u = Y$ となるものをとれば

$$\Omega(A^*, B^*) = d\omega(A^*, B^*) + \frac{1}{2}(\omega(A^*)\,\omega(B^*) - \omega(B^*)\,\omega(A^*))$$

$$= \frac{1}{2}(A^*(\omega(B^*)) - B^*(\omega(A^*)) - \omega([A^*, B^*])) + \frac{1}{2}[A, B]$$

$$= \frac{1}{2}(A^*(B) - B^*(A) - [A, B]) + \frac{1}{2}[A, B] = 0.$$

(iii) X が垂直, Y が水平の場合, $X = A^*{}_u$ $(A \in \mathfrak{g})$ とし, Y を水平ベクトル場に拡張しておけば,

$$\Omega(A^*, Y) = d\omega(A^*, Y) + \frac{1}{2}(\omega(A^*)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(A^*))$$

$$= \frac{1}{2}(A^*(\omega(Y)) - Y(\omega(A^*)) - \omega([A^*, Y]))$$

$$= \frac{1}{2}(Y(A) - \omega([A^*, Y])) = -\frac{1}{2}\omega([A^*, Y]).$$

したがって, $[A^*, Y]$ が水平であることを証明すれば充分である. これは, 水平接分布が G の右作用で不変であることを無限小化したに過ぎない. 実際,

$$[A^*, Y] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(Y - R_{e^{tA}} Y)$$

と (6.6) から, Y が水平なら $[A^*, Y]$ も水平であることがわかる. これで (6.9) は証明された.

さて, X, Y を P 上の任意のベクトル場とすると, (6.9) により

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H)$$

$$= \frac{1}{2}(X^H(\omega(Y^H)) - Y^H(\omega(X^H)) - \omega([X^H, Y^H]))$$

$$= -\frac{1}{2}\omega([X^H, Y^H]).$$

したがって，$\Omega \equiv 0$ となる必要十分条件は，水平接分布 $\{H_u\,;\,u \in P\}$ が積分可能（または包合的 (involutive)）なことである．

問題 6.1 P を M 上の主 G 束とするとき，次のようなベクトル束の完全系列が考えられる．

$$0 \longrightarrow P \times_{Ad} \mathfrak{g} \xrightarrow{\alpha} TP/G \xrightarrow{\beta} TM \longrightarrow 0.$$

（i） TP/G のファイバー，構造群，TP/G に同伴する主ファイバー束が何であるかを説明せよ．

（ii） 写像 α, β を定義し，上の系列が完全であることを証明せよ．

（iii） P の接続とは上の完全系列の分裂（すなわち，準同型写像 $\gamma : TM \to TP/G$ で $\beta \circ \gamma$ が TM の恒等変換となるもの）にほかならないことを証明せよ．

§7. 主束の接続からベクトル束の接続へ

我々は §1 でベクトル束の接続を定義し，§5 では，ベクトル束に同伴する主ファイバー束，そして一般の主ファイバー束の接続の定義を導いた．ここでは，逆に主ファイバー束の接続から，それに同伴するベクトル束の接続を導こう．すでに主ファイバー束 P の接続の曲率はベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値をとる 2 次微分形式であることを学んだ．したがって，曲率の共変外微分等を考えるためにも同伴ベクトル束の接続が必要である．

この節でも，P は M 上の主ファイバー束，その構造群を G とする．表現 $\rho : G \to GL(r\,;\boldsymbol{R})$ から $\boldsymbol{R}^r$ をファイバーとするベクトル束

(7.1) $$E = P \times_{\rho} \boldsymbol{R}^r$$

が定義される（(4.10) 参照）．対 $(u, y) \in P \times \boldsymbol{R}^r$ の定める $E = (P \times \boldsymbol{R}^r)/G$ の元を $[u, y]$ と書く．各 $u \in P_x$ は同型写像

(7.2) $$u : \boldsymbol{R}^r \longrightarrow E_x, \qquad y \mapsto [u, y]$$

を定義する．（§4 で E から主ファイバー束 P つくるのには同型写像 $u : \boldsymbol{R}^r \to$

E_x の集合を P_x としたのであった.)

E の切断 $\xi \in A^0(E) = \Gamma(E)$ に対し，写像

(7.3) $$\tilde{\xi} : P \longrightarrow \boldsymbol{R}^r, \qquad \tilde{\xi}(u) = u^{-1}(\xi(\pi(u)))$$

を定義する．ここで $\pi : P \to M$ は射影，したがって，$x = \pi(u) \in M$ とすると $\xi(\pi(u)) \in E_x$ で，$u : \boldsymbol{R}^r \to E_x$ の逆写像 u^{-1} から $\boldsymbol{R}^r$ の元 $u^{-1}(\xi(\pi(u)))$ を得る．この $\boldsymbol{R}^r$ 値関数 $\tilde{\xi}$ は G の右作用で

(7.4) $$\tilde{\xi}(ua) = \rho(a)^{-1}\tilde{\xi}(u), \qquad a \in G$$

と変換する．実際 (7.2) によれば，

$$\xi(\pi(u)) = [u, \tilde{\xi}(u)],$$
$$\xi(\pi(ua)) = [ua, \tilde{\xi}(ua)] = [u, \rho(a)\tilde{\xi}(ua)].$$

$\pi(u) = \pi(ua)$ だから，$[u, \tilde{\xi}(u)] = [u, \rho(a)\tilde{\xi}(ua)]$．したがって $\tilde{\xi}(u) = \rho(a)\tilde{\xi}(ua)$．証明を逆にたどることにより，(7.4) を満たす関数 $\tilde{\xi} : P \to \boldsymbol{R}^r$ は切断 $\xi : M \to E$ から得られる．

同様に，E に値をとる p 次微分形式 $\xi \in A^p(E)$ に対し，$\boldsymbol{R}^r$ に値をとる P 上の p 次微分形式 $\tilde{\xi}$ を

(7.5) $$\tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) = u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \cdots, \pi_* X_p)), \qquad X_1, \cdots, X_p \in T_u P$$

で定義する．そのとき，$\tilde{\xi}$ は次の二つの性質をもっている．

(7.6) $$R_a{}^* \tilde{\xi} = \rho(a)^{-1} \tilde{\xi}, \qquad a \in G,$$

(7.7) X_1 が垂直ならば，$\tilde{\xi}(X_1, \cdots, X_p) = 0$.

(7.6) の証明は (7.4) と同様．(7.7) は $\tilde{\xi}$ の定義から明らか．また逆に $\boldsymbol{R}^r$ 値の P 上の p 次微分形式 $\tilde{\xi}$ が条件 (7.6), (7.7) を満たすならば，$\xi \in A^p(E)$ から (7.5) によって得られる．

以上をまとめて，

(7.8) **定理** M 上の E 値の p 次微分形式 ξ の空間 $A^p(E)$ と P 上の $\boldsymbol{R}^r$ 値の p 次微分形式 $\tilde{\xi}$ で (7.6), (7.7) を満たすものの空間 $\tilde{A}^p(P)$ は (7.5) によって 1 対 1 に対応する．

この対応は次の性質をもっている.

(7.9) $$\widetilde{\alpha\xi} = \pi^*\alpha\cdot\tilde{\xi}\,, \qquad \alpha\in A^q(M),\ \xi\in A^p(E)\,.$$

(代数の言葉でいえば, 対応 $\oplus A^p(E)\to\oplus\tilde{A}^p(P)$ は $\oplus A^q(M)$ 加群として同型写像である.)

この対応を使って共変外微分を定義する. まず $\tilde{\xi}\in\tilde{A}^p(P)$ に対し $D\tilde{\xi}\in\tilde{A}^{p+1}(P)$ を

(7.10) $$D\tilde{\xi}(X_1,\cdots,X_{p+1}) = d\tilde{\xi}(X_1{}^H,\cdots,X_{p+1}{}^H), \qquad X_1,\cdots,X_p\in T_u(P)$$

で定義する. $R^*{}_a\circ d = d\circ R^*{}_a$ だから $d\tilde{\xi}$ も (7.6) を満たす. 水平接分布は R_a で不変だから $D\tilde{\xi}$ も (7.6) を満たす. $D\tilde{\xi}$ が (7.7) を満たすのは明らか. したがって, $D\tilde{\xi}$ は実際に $\tilde{A}^{p+1}(P)$ に属する. $D\tilde{\xi}$ を $\tilde{\xi}$ の共変外微分と呼ぶ.

次の公式は D の定義から明らかである.

(7.11) $$D(\alpha\wedge\tilde{\xi}) = d\alpha\wedge\tilde{\xi} + (-1)^q\alpha\wedge D\tilde{\xi}\,,$$
$$\alpha\in A^q(M),\ \tilde{\xi}\in\tilde{A}^p(P)\,.$$

ここで $\pi^*\alpha$ を簡単のため α と書いた.

P 上の接続形式 ω を使って $D\tilde{\xi}$ を次のように書くこともできる.

(7.12) $$D\tilde{\xi} = d\tilde{\xi} + \rho(\omega)\wedge\tilde{\xi}\,, \qquad \tilde{\xi}\in\tilde{A}^p(P)\,.$$

これは $p=0$ のときに証明すれば, 一般の場合は (7.11) から容易にわかる. $p=0$ の場合 (7.12) の両辺を水平ベクトルと垂直ベクトルに対してテストしてみればよい. X が水平ベクトルなら, $\omega(X)=0$ だから, (7.10) から (7.12) が成り立つことがわかる. 垂直ベクトルは $A^*{}_u$, $A\in\mathfrak{g}$, の形だとしてよい. そのとき, $D\tilde{\xi}(A^*{}_u)=0$. 一方,

$$d\tilde{\xi}(A^*{}_u) = \frac{d}{dt}\tilde{\xi}(u\,e^{tA})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\rho(e^{-tA})\,\tilde{\xi}(u)\Big|_{t=0} = -\rho(A)\,\tilde{\xi}(u)\,,$$

したがって (7.12) の右辺も垂直ベクトルに対しては 0 になる.

$\xi\in A^p(E)$ に対し, 対応する $\tilde{\xi}\in\tilde{A}^p(P)$ の共変外微分 $D\tilde{\xi}\in\tilde{A}^{p+1}(P)$ を考える. $D\tilde{\xi}$ に対応する $A^{p+1}(E)$ の元を $D\xi$ と書き, ξ の共変外微分と呼ぶ. これが (2.2) で定義した D と一致することを確かめるには $p=0$ の場合を考

えれば充分である ((7.11) 参照). (2.2) により $p=0$ の場合には $D=\nabla$ だから, (7.12) と比べれば明らかであろう.

§2 でベクトル束 E の接続から E^*, $\mathrm{End}(E)$ 等に自然に接続が入ることを説明したが, これらのベクトル束は主ファイバー束 P と $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ の適当な表現から得られるから, この節で説明したようなもっと一般の立場からも明らかであろう. このように, 接続は主ファイバー束に対して定義して性質を調べておけば, 理論的には充分なのである.

§8. 平行移動とホロノミー

多様体 M 上のベクトル束 E に接続を一つ考える. $x(t)$, $a \leqq t \leqq b$, を M 内の曲線, $\dot{x}(t)=\dfrac{dx}{dt}$ をその接ベクトル (速度ベクトル) とする. ξ をこの曲線に沿って定義された E の切断とする. すなわち, $\xi_t=\xi(x(t))\in E_{x(t)}$. (ここで $E_{x(t)}$ は E の $x(t)\in M$ におけるファイバー). 切断 ξ が微分方程式

$$(8.1)\qquad \nabla_{\dot{x}(t)}\xi=0, \qquad a\leqq t\leqq b,$$

を満たすならば ξ は曲線 $x(t)$ に沿って**平行** (parallel) であるという. 方程式 (8.1) を E の局所標構場 $e_1,\cdots,e_r$, M の局所座標系 $x^1,\cdots,x^n$ 等を使って具体的に書いてみる. (1.7) のように $\xi=\sum\xi^\lambda e_\lambda$ とおき, (1.8) のように $\nabla e_\lambda=\sum\omega_\lambda{}^\mu e_\mu$ で定義された接続形式 $(\omega_\lambda{}^\mu)$ を

$$(8.2)\qquad \omega_\lambda{}^\mu=\sum\Gamma_\lambda{}^\mu{}_i\,dx^i$$

と表わせば, (1.9) を参考にして

$$(8.3)\qquad \nabla_{\dot{x}(t)}\xi=\sum\left\{\frac{d\xi^\lambda(x(t))}{dt}+\sum\Gamma_\mu{}^\lambda{}_i(x(t))\frac{dx^i}{dt}\xi^\mu(x(t))\right\}e_\lambda$$

を得る. したがって, (8.1) は斉1次常微分方程式の系

$$(8.4)\qquad \frac{d\xi^\lambda}{dt}+\sum\Gamma_\mu{}^\lambda{}_i\frac{dx^i}{dt}\xi^\mu=0, \qquad \lambda=1,\cdots,r$$

にほかならない. 微分方程式の一般論により, 初期値 $\xi_x\in E_{x(a)}$ に対し (8.1)

の解 ξ が一意に定まる．そのとき，ξ は ξ_a を $x(t)$ に沿って **平行移動** (parallel displacement) して得られたという．写像

$$\xi_a \in E_{x(a)} \longrightarrow \xi_b = (\xi)_{t=b} \in E_{x(b)} \tag{8.5}$$

は二つのファイバー間の同型写像となる．以上，曲線 $x(t)$ は一回微分可能として議論したが区分的に微分可能であれば微分可能な区分ごとに上の議論を使うことができる．

M の点 x_0 を一つ固定し，$x(t)$, $a \leqq t \leqq b$, を x_0 に始まり，x_0 に終る曲線とする．すなわち，$x_0 = x(a) = x(b)$．この閉じた曲線に沿った平行移動により，ファイバー E_{x_0} の自己同型写像を得る．x_0 を始点とする閉じた曲線 c に沿った平行移動が定義する E_{x_0} の自己同型写像を τ_c と書くことにする．c を逆に動く曲線を c^{-1} と書けば

$$\tau_{c^{-1}} = \tau_c{}^{-1}. \tag{8.6}$$

また c' も x_0 を始点とする閉じた曲線，まず c に沿って次に c' に沿って動く曲線を $c' \circ c$ と書くことにすると

$$\tau_{c' \circ c} = \tau_{c'} \circ \tau_c \tag{8.7}$$

となる．x_0 を始点とする閉じた区分的に微分可能な曲線 c をすべて考えると，τ_c の全体が群になることは明白であろう．E_{x_0} の自己同型写像全体のつくる群 $GL(E_{x_0})$ の部分群になるわけであるが，この群を x_0 を基点とする **ホロノミー群** (holonomy group) と呼び，Ψ_{x_0} と書くことにする．一般には，Ψ_{x_0} は $GL(E_{x_0})$ の閉部分群とはならないが，Lie 部分群になることが知られている．

ベクトル束 E に内積 g が与えられていて，∇ が内積を保つ接続であるとする．ξ と η が共に曲線 $x(t)$ に沿って平行であるならば，(8.1) を満たすから，

$$\frac{d}{dt} g(\xi, \eta) = g(\nabla_{\dot{x}(t)} \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_{\dot{x}(t)} \eta) = 0$$

となる．すなわち，内積 $g(\xi, \eta)$ は平行移動で不変である．したがって，この場合，ホロノミー群は内積を不変にする．いいかえれば，ホロノミー群は，直交群 $O(E_x)$ に含まれる．

より一般に，M 上の主 G 束 P の接続の場合，点 $x_0 \in M$ 上のファイバーに点 $u_0 \in P$ を一つえらび，x_0 からはじまる曲線 $x(t)$ に対し，u_0 からはじまる P の曲線 $u(t)$ で $\pi(u(t)) = x(t)$ かつ，速度ベクトル $\dot{u}(t)$ が水平になるものを考える．（そのような $u(t)$ が一意に存在することも上と同様，斉1次常微分方程式の問題に帰着する．） このとき，曲線 $u(t)$ を **水平** であるとか，$x(t)$ に沿った u_0 の **平行移動** とかいう．水平分布が G の作用で不変であるから，$u(t)$ が水平ならば任意の $s \in G$ に対し，$u(t) \cdot s$ も水平で $u_0 s$ の平行移動になっている．x_0 に始まり x_0 に終る閉曲線 $c = x(t)_{a \leq t \leq b}$ に対し，$\tilde{c} = u(t)_{a \leq t \leq b}$ を u_0 の平行移動としたとき，G の元 τ_c が

(8.8) $$u(b) = u_0 \cdot \tau_c$$

によって定まる．すなわち，$\tilde{c}$ の終点が始点からどれだけずれたかを測る量が τ_c である．同様に，x_0 に始まり x_0 に終るもう一つの曲線 c' を考える．c に沿った平行移動で u_0 は $u_0 \cdot \tau_c$ に動く．平行移動と G の作用は可換だから，$u_0 \cdot \tau_c$ を c' に沿って平行移動すると $u_0 \cdot \tau_{c'} \tau_c$ となる．したがって $u_0 \cdot \tau_{c' \circ c} = u_0 \tau_{c'} \tau_c$，よって，

(8.9) $$\tau_{c' \circ c} = \tau_{c'} \tau_c$$

を得るが，これはベクトル束の接続の場合にはすでに証明した式である．特に $\tau_{c^{-1}} \cdot \tau_c = \tau_{c^{-1} \circ c}$ であるが，$\tau_{c^{-1} \circ c}$ のつくり方から，$\tau_{c^{-1} \circ c}$ は G の単位元．したがって，

(8.10) $$\tau_{c^{-1}} = \tau_c{}^{-1}$$

を得る．ベクトル束の接続の場合と同様，τ_c の全体が，G の部分群となる．これを考えている接続の **ホロノミー群** (holonomy group) と呼び，Ψ_{u_0} と書くことにする．そのとき u_0 を始点と呼ぶが，始点 u_0 を u_1 に変えると Ψ_{u_1} は Ψ_{u_0} に共役である．詳しくいうと，$x_0 = \pi(u_0)$ から $x_1 = \pi(u_1)$ までの曲線 c_0 を一つ固定し，$\tilde{c}_0$ を u_0 に始まる水平曲線で $\pi(\tilde{c}_0) = c_0$ となるものとすれば，$\tilde{c}_0$ の終点は u_1 と同じファイバーの点であるから，群 G の元 a を使って $u_1 a$ と書ける．そのとき，

$$(8.11) \qquad \Psi_{u_1} = a \cdot \Psi_{u_0} \cdot a^{-1}$$

となる．(8.11) を証明するため，x_0 を基点とする閉曲線 c に対し，x_1 を基点とする閉曲線 $c_0 \circ c \circ c_0^{-1}$ を対応させる．$\tilde{c}$ を u_0 を始点とし，$\pi(\tilde{c}) = c$ となる水平曲線とすると，終点は定義 (8.8) により $u_0\tau_c$ である．u_1 を始点とし $c_0 \circ c \circ c_0^{-1}$ を覆う水平曲線を得るためには，まず $R_{a^{-1}}(\tilde{c}_0^{-1})$ により u_1 から $u_0 a^{-1}$ まで動き，次に $R_{a^{-1}}(\tilde{c})$ により，$u_0 a^{-1}$ から $u_0\tau_c a^{-1}$ まで行き，最後に，$R_{\tau_c a^{-1}}(\tilde{c}_0)$ により $u_0\tau_c a^{-1}$ から $u_1 a\tau_c a^{-1}$ に到達する．したがって，u_1 を始点とするとき，$c_0 \circ c \circ c_0^{-1}$ に沿った平行移動で得られるホロノミー群の元は $a\tau_c a^{-1}$ である．すなわち，c_0 が同型写像

$$\tau_c \in \Psi_{u_0} \longrightarrow a \cdot \tau_c \cdot a^{-1} \in \Psi_{u_1}$$

を引きおこすことがわかった．特に (8.11) が証明された．

以上の議論で曲線の微分可能性について，はっきり述べなかったが，我々は連続で区分的に微分可能な（すなわち微分可能な曲線を有限個つなげた）ものを使う．曲線 c と c' をつないだ $c' \circ c$ を必要とするから，いたるところ微分可能な曲線だけで話をすますことはできない．

次にホロノミー群について証明なしでいくつかの事実を述べる．これらのことは以下必要としない．x_0 を基点とし，そして 0 にホモトープな閉曲線 c だけを使って得られる $\tau_c \in G$ を集めると，Ψ_{u_0} の正規部分群が得られる．これを $\Psi^0_{u_0}$ と書く．そのとき，$\Psi^0_{u_0}$ は G の弧状連結な部分群となり，よって Lie 部分群である．しかし必ずしも閉部分群とは限らない．ホロノミー群は $\Psi^0_{u_0}$ を連結成分とする Lie 群になる．始点 u_0 に水平な曲線でつながる P の点，すなわち u_0 を平行移動して得られる P の点全体の集まりを $H(u_0)$ と書くと，$H(u_0)$ はホロノミー群 Ψ_{u_0} を構造群とする M 上の主ファイバー束となるので，u_0 を始点とする P の **ホロノミー部分束** (holonomy subbundle) と呼ぶ．一般に Q が P の主部分束であるとき，Q の接続は P の接続に一意に拡張される．一般に P の接続および P の部分主束 Q が与えられているとき，Q の点 u_0 を

始点とする P のホロノミー部分束 $H(u_0)$ が Q に含まれているということが，与えられた P の接続が Q の接続の拡張になっているための必要十分条件である．したがってホロノミー部分束 $H(u_0)$ は，P の与えられた接続が定義され得る極小部分束である．すなわち，与えられた接続に対して最も経済的な部分束ということになる．以上の事実の証明については [K–N]，vol. 1 を参照されたい．

曲率が 0 の場合に上のことを直接に理解しよう．P に与えられた接続の曲率が 0 であるとする．そのとき水平部分空間による接分布が積分可能である．点 $u_0 \in P$ を通る極大積分多様体がホロノミー部分束 $H(u_0)$ にほかならないことは $H(u_0)$ の定義から明白であろう．$H(u_0)$ の各点 u での接ベクトル空間は $T_u P$ の水平部分空間にほかならない．したがって $H(u_0)$ は M の被覆多様体になっていて，ホロノミー群 Ψ_{u_0} は離散である．x_0 を基点とする閉曲線 c と c' がたがいにホモトープなら，$\tau_c = \tau_{c'}$ となる．したがって，c の定める基本群 $\pi_1(M, x_0)$ の元 $[c]$ に対し $\tau_c \in \Psi_{u_0}$ を対応させる写像を

$$\tau : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow \Psi_{u_0} \subset G$$

と書けば，τ は全射準同型である．

逆に，多様体 M，基点 $x_0 \in M$，Lie 群 G，準同型写像

$$\tau : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow G$$

が与えられたとする．M の普遍被覆空間 $\tilde{M}$ は $\pi_1(M, x_0)$ を構造群とする主ファイバー束と考えられる．この主束にはただ一つの接続が存在する．すなわち，各点 $\tilde{x} \in \tilde{M}$ で $T_{\tilde{x}} \tilde{M}$ 全体を水平部分空間とせざるを得ない．明らかに水平分布は積分可能だから，曲率は 0 である．準同型写像 τ により，主 G 束 P が次のように得られる．

$$P = \tilde{M} \times_\tau G .$$

そして，主束 $\tilde{M}$ の接続から P の接続が得られる（問題 5.1 参照）．この接続の曲率ももちろん 0 である．

§9. アフィン接続

ベクトル束の一番重要な例は接ベクトル束 TM であるが，TM の接続を M の**アフィン接続** (affine connection) と呼ぶ．アフィン接続の場合には $\nabla_X Y$ において X も Y も共に M のベクトル場であるから，$\nabla_Y X$ も同時に考えることができる．

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \tag{9.1}$$

とおくと，M 上の関数 f に対し

$$\begin{aligned} 2T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \\ &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - Y(f)\cdot X - f[X, Y] + Y(f)\cdot X \\ &= f\cdot T(X, Y) \end{aligned}$$

となる．fY に対しても同様だから

$$T(fX, Y) = f\cdot T(X, Y) = T(X, fY) \tag{9.2}$$

を得る．この式から，ベクトル場 $T(X, Y)$ が点 $x \in M$ で与える接ベクトル $T(X, Y)_x \in T_x M$ は X_x, Y_x によって定まることがわかる (問題 1.1 参照)．すなわち，M の各点 x で T は写像

$$T_x M \times T_x M \longrightarrow T_x M$$

を定義するからタイプ (1,2) のテンソル場である．T をアフィン接続 ∇ の**ねじれ率テンソル** (torsion tensor) とか**振率**と呼ぶ．$T(X, Y)$ が X, Y に関して交代，すなわち

$$T(X, Y) = -T(Y, X) \tag{9.3}$$

であることは定義から明白．したがって，T は TM に値をとる 2 次微分形式とも考えられる．すなわち，

$$T \in A^2(TM) = \Gamma(M, \wedge^2 T^*M \otimes TM).$$

接ベクトル束 TM の局所標構 $e_1, \cdots, e_n$ とその双対基 $\theta^1, \cdots, \theta^n$ を考える．$\theta^1, \cdots, \theta^n$ は 1 次微分形式で

$$\theta^i(e_j) = \delta^i{}_j$$

となる．ねじれ率 T を

(9.4) $$T = \sum \Theta^i e_i \in A^2(TM)$$

と書いてみる．ここで Θ^i, $i=1, \cdots, n$, は2次微分形式．(9.1) で $X = e_j$, $Y = e_k$ とおき，

$$\nabla e_k = \sum \omega_k{}^i e_i\,, \qquad \nabla_{e_j} e_k = \sum \omega_k{}^i(e_j) e_i$$

を使うと

$$2T(e_j, e_k) = \sum (\omega_k{}^i(e_j) - \omega_j{}^i(e_k)) e_i - [e_j, e_k]$$

となる．これを $\theta^i(*)$ の $*$ のところに代入し，1章の (2.3), (2.11) を使って

$$\begin{aligned} 2\theta^i(T(e_j, e_k)) &= \omega_k{}^i(e_j) - \omega_j{}^i(e_k) - \theta^i([e_j, e_k]) \\ &= 2\sum (\omega^i{}_l \wedge \theta^l)(e_j, e_k) + 2\,d\theta^i(e_j, e_k) \end{aligned}$$

を得る．左辺は，(9.4) を見れば $2\Theta^i(e_j, e_k)$ となるから，

(9.5) $$\Theta^i = d\theta^i + \sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j \qquad (\text{行列の記号で，} \Theta = d\theta + \omega \wedge \theta)$$

を得るが，(2.9) で得た

(9.6) $$\Omega_j{}^i = d\omega_j{}^i + \sum \omega_k{}^i \wedge \omega_j{}^k \qquad (\text{行列の記号で，} \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega)$$

と合わせて，アフィン接続の**第一および第二構造方程式** (first and second structure equations) と呼ぶ．

次に TM に値をとる1次微分形式 $\sum \theta^i e_i \in A^1(TM)$ を考える．$X = \sum \xi^i e_i \in TM$ に対し

$$\sum \theta^i(X) e_i = \sum \xi^j \theta^i(e_j) e_i = \sum \xi^i e_i = X$$

であるから，$\sum \theta^i e_i$ は TM の恒等変換を与えることに注意しておく．(2.2) で定義した $D: A^1(TM) \to A^2(TM)$ を使って

(9.7) $$\begin{aligned} D(\sum \theta^i e_i) &= \sum d\theta^i e_i - \sum \theta^i \wedge \nabla e_i \\ &= \sum (d\theta^i - \sum \theta^j \wedge \omega_j{}^i) e_i \\ &= \sum \Theta^i e_i = T \end{aligned}$$

を得る．さらに両辺の D をとると

$$D^2(\sum \theta^i e_i) = D \sum \Theta^i e_i = DT.$$

左辺は (2.5) により

$$D^2(\sum \theta^i e_i) = \sum \theta^i \wedge D^2 e_i = \sum \theta^i \wedge R e_i = \sum \theta^i \wedge \Omega_i{}^j e_j.$$

真中の項は

$$D \sum \Theta^i e_i = \sum d\Theta^j e_i + \sum \Theta^i \wedge \nabla e_i = \sum (d\Theta^i + \sum \omega_j{}^i \wedge \Theta^j) e_i.$$

これを比較して

$$\sum \theta^i \wedge R e_i = DT \in A^3(TM), \tag{9.8}$$

$$\sum \Omega_j{}^i \wedge \theta^j = d\Theta^i + \sum \omega_j{}^i \wedge \Theta^j \tag{9.9}$$

を得る．もちろん (9.8) と (9.9) は同一の式を違う記号で表わしたものである．(9.8) の 3 次微分形式にベクトル場 X, Y, Z を代入して，

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 2(DT)(X, Y, Z) \tag{9.10}$$

とも表わせる．これらを **Bianchi の第一恒等式** (Bianchi's first identity) と呼ぶ．アフィン接続の場合には前節で証明した (2.16) と (2.17)，すなわち

$$DR = 0, \tag{9.11}$$

$$d\Omega_j{}^i - \sum \Omega_k{}^i \wedge \omega_j{}^k + \sum \omega_k{}^i \wedge \Omega_j{}^k = 0 \tag{9.12}$$

を **Bianchi の第二恒等式** (Bianchi's second identity) と呼ぶ．

M 上のタイプ (r, s) のテンソル束 $T^r{}_s(M)$ を考える (1 章 (6.6) を参照)．M のアフィン接続 ∇ は TM の接続であるから (1.18)，(1.20) で見たように $T^r{}_s(M)$ の接続に拡張される．タイプ (r, s) のテンソル場 $K \in \Gamma(M, T^r{}_s(M))$ は各点 $x \in M$ で $T_xM \times \cdots \times T_xM$ (s 回) から $T^r{}_{0,x} = T_xM \otimes \cdots \otimes T_xM$ (r 回) への多重線形写像を定義する．$X, X_1, \cdots, X_s$ を M のベクトル場とするとき，

$$\begin{aligned}(\nabla_X K)(X_1, \cdots, X_s) \\ = \nabla_X(K(X_1, \cdots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} K(X_1, \cdots, \nabla_X X_i, \cdots, X_s)\end{aligned} \tag{9.13}$$

が成り立つ(問題 1.3 を参照)．∇K はタイプ $(r, s+1)$ のテンソル場，$\nabla^2 K$ はタイプ $(r, s+2)$ のテンソル場である．上のように多重線形写像としては

$$(9.14)\qquad (\nabla K)(X_1, \cdots, X_s, X) = (\nabla_X K)(X_1, \cdots, X_s),$$

$$(9.15)\qquad (\nabla^2 K)(X_1, \cdots, X_s, X, Y) = (\nabla_Y(\nabla K))(X_1, \cdots, X_s, X)$$

と定義される．そのとき，

$$(9.16)\qquad (\nabla^2 K)(X_1, \cdots, X_s, X, Y) = (\nabla_Y(\nabla_X K) - \nabla_{\nabla_Y X} K)(X_1, \cdots, X_s)$$

が成り立つ．証明は，$s=0$，すなわち K がタイプ $(r,0)$ の場合を考えれば一般の場合も理解できる．(9.15), (9.13), (9.14) を使って

$$\begin{aligned}(\nabla^2 K)(X, Y) &= (\nabla_Y(\nabla K))(X) = \nabla_Y(\nabla K(X)) - \nabla K(\nabla_Y X)\\ &= \nabla_Y \nabla_X K - \nabla_{\nabla_Y X} K\end{aligned}$$

を得る．

(9.16) の $X_1, \cdots, X_s$ を略して，上のように

$$(9.17)\qquad (\nabla^2 K)(X, Y) = \nabla_Y \nabla_X K - \nabla_{\nabla_Y X} K$$

と書くことにしよう．X と Y を入れかえて

$$\begin{aligned}&(\nabla^2 K)(X, Y) - \nabla^2 K(Y, X)\\ &\qquad = (\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)K - \nabla_{(\nabla_Y X - \nabla_X Y)} K\\ &\qquad = (\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{[Y,X]})K - \nabla_{\nabla_Y X - \nabla_X Y - [X,Y]} K\\ &\qquad = -2R(X, Y)\cdot K + 2\nabla_{T(X,Y)} K\end{aligned}$$

を得る．すなわち，

$$(9.18)\qquad \frac{1}{2}(\nabla^2 K(X, Y) - \nabla^2 K(Y, X)) = -R(X, Y)\cdot K + \nabla_{T(X,Y)} K.$$

ここで $R(X, Y)$ は K に微分として作用している．(すなわち線形変換 $R(X, Y) : TM \to TM$ を (2.19), (2.21) を使って $T^r{}_s(M)$ に微分 (derivation) として拡張する)．式 (9.18) も **Ricci の恒等式** (Ricci's identity) と呼ばれる．

M の局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$ を使い

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \cdots, \quad e_n = \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad \theta^1 = dx^1, \quad \cdots, \quad \theta^n = dx^n$$

としたとき

$$(9.19)\qquad \nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma^i{}_{jk} e_i$$

により n^3 個の関数 $\Gamma^i{}_{jk}$ を定義する．これらの関数を ∇ の $x^1,\cdots,x^n$ に関する **Christoffel の記号** (Christoffel's symbols) と呼ぶ．ベクトル場 $X=\sum\xi^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$，$Y=\sum\eta^k\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ に対し (1.5) と (9.19) を使って $\nabla_X Y$ を計算すると，

$$(9.20)\qquad \nabla_X Y=\sum\xi^j\nabla_j\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad ただし，\nabla_j\eta^i=\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}+\sum\Gamma^i{}_{jk}\eta^k$$

を得る．

また，(9.1) において $X=e_j$，$Y=e_k$ とおき

$$(9.21)\qquad T(e_j,e_k)=\sum T^i{}_{jk}e_i$$

によりテンソル T の成分 $T^i{}_{jk}$ を定義すると

$$(9.22)\qquad T^i{}_{jk}=\frac{1}{2}(\Gamma^i{}_{jk}-\Gamma^i{}_{kj})\,.$$

アフィン接続を §5 で考えたように主ファイバー束の接続として理解しよう．まず接ベクトル束 TM から $GL(n;\boldsymbol{R})$ を構造群とする主ファイバー束 $L(M)$ をつくるため，同型写像

$$(9.23)\qquad u:\boldsymbol{R}^n\longrightarrow T_xM$$

を $x\in M$ における**線形標構** (linear frame) と呼び，その集合を $L_x(M)$ と書き，M の**線形標構束** (bundle of linear frames) を $L(M)=\bigcup_x L_x(M)$ によって定義する．これは §4 のベクトル束 E から主ファイバー束 P の構成を $E=TM$ に適用したに過ぎない．次に，$L(M)$ に $\boldsymbol{R}^n$ 値の 1 次微分形式 $\theta=(\theta^1,\cdots,\theta^n)$ をつくる．射影 $\pi:L(M)\to M$ により $X\in T_u(L(M))$ を $\pi_*(X)\in T_{\pi(u)}(M)$ に移し，

$$(9.24)\qquad \theta(X)=u^{-1}(\pi_*(X))\in\boldsymbol{R}^n$$

と θ を定義する．θ は接続とは無関係に $L(M)$ 上に自然に定義される $\boldsymbol{R}^n$ 値の微分 1 次形式である．このような微分形式は $L(M)$ に固有のもので一般の主ファイバー束には存在しない．

いま，$(e_1,\cdots,e_n)$ を局所的に (すなわち，M の開集合 U 上で) 定義された

線形標構場とする．これは局所的に（すなわち U で）定義された $L(M)$ の切断 $\sigma: U \to L(M)$ と考えられる．$\theta=(\theta^1,\cdots,\theta^n)$ を σ で引き戻せば U 上で定義された $\boldsymbol{R}^n$ 値の1次微分形式 $\sigma^*\theta = (\sigma^*\theta^1,\cdots,\sigma^*\theta^n)$ を得るが，実は，$\sigma^*\theta^1,\cdots,\sigma^*\theta^n$ は $e_1,\cdots,e_n$ に双対な基になっている．すなわち

$$\sigma^*\theta^i(e_j) = \delta^i{}_j. \tag{9.25}$$

これを確かめるには θ の定義に戻って計算する．$e_j \in T_xM$ ならば

$$\sigma^*\theta(e_j) = \theta(\sigma_* e_j) = \sigma(x)^{-1}(\pi_*\sigma_* e_j) = \sigma(x)^{-1} e_j$$

となるが，$\sigma(x): \boldsymbol{R}^n \to T_xM$ が $(e_1,\cdots,e_n)$ に対応しているということは

$$(0,\cdots,0,\overset{(j)}{1},0,\cdots,0) \in \boldsymbol{R}^n \xrightarrow{\sigma(x)} e_j \in T_xM$$

ということであるから

$$\sigma^*\theta(e_j) = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$$

すなわち (9.25) を得る．

したがって，ここで $\sigma^*\theta^j$ と書いている1次微分形式はこの節のはじめに θ^j と書いた微分形式にほかならない．

定義からすぐわかるように $X \in T_u(L(M))$ がファイバーに沿ったベクトル，すなわち $\pi_*X=0$，であるとき，そしてそのときに限り $\theta(X)=0$ となる．§6で定義したように，そのようなベクトル X は**垂直** (vertical) であるという．

一方，M のアフィン接続は $L(M)$ の接続と考えて $\mathfrak{gl}(n;\boldsymbol{R})$ に値をとる $L(M)$ 上の1次微分形式 ω で条件

$$R_a{}^*\omega = a^{-1}\omega a, \qquad a \in GL(n;\boldsymbol{R}) \tag{9.26}$$

$$\omega(A^*) = A, \qquad A \in \mathfrak{gl}(n;\boldsymbol{R}) \tag{9.27}$$

を満たすもので与えられるが，(9.27) によれば，垂直な X は $X=0$ でない限り $\omega(X)\neq 0$ である．したがって，一般の $X \in T_u(L(M))$ が $\theta(X)=0$, $\omega(X)=0$ の両方を満たすのは $X=0$ のときに限る．すなわち，

$$\theta^i(X)=0,\ \omega_j{}^i(X)=0,\ \forall i,j \iff X=0.$$

一方，微分形式 $\theta^i, \omega_j{}^i$ の数は $n+n^2$ 個で，これは $L(M)$ の次元と一致する．ということは，写像

$$(9.28)\qquad X \in T(L(M)) \longrightarrow (\theta(X), \omega(X)) \in \boldsymbol{R}^n + \mathfrak{gl}(n\,;\boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n^2}$$

によって，$T(L(M))$ が $\boldsymbol{R}^n + \mathfrak{gl}(n\,;\boldsymbol{R})$ をファイバーとする直積束と同型になることを示している．トポロジーの言葉ではこれを $L(M)$ が**平行性をもっている** (parallelizable)，微分幾何の言葉では $L(M)$ に**絶対平行性** (absolute parallelism) が定義されているという．

さて，M の**アフィン接続の構造方程式**を $L(M)$ の微分形式で書いてみる（カッコ内は行列の記号）．

$$(9.29)\qquad d\theta^i = -\sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j + \Theta^i \qquad (d\theta = -\omega \wedge \theta + \Theta),$$

$$(9.30)\qquad d\omega_j{}^i = -\sum \omega_k{}^i \wedge \omega_j{}^k + \Omega_j{}^i \qquad (d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega).$$

ここで (9.29) はねじれ率を表わす微分形式 Θ を定義し，(9.30) は (5.24) の特別の場合で曲率微分形式 Ω を定義する．(9.29) と (9.30) を局所切断 σ で $U \subset M$ に引き戻した式が (9.5) と (9.6) にほかならない．((9.5), (9.6) の θ, ω 等は $\sigma^*\theta$, $\sigma^*\omega$ 等に相当する．)

$L(M)$ 上の曲率形式 Ω は (6.9) によれば

$$(9.31)\qquad \Omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H), \qquad X, Y \in T_u(L(M))$$

とも定義されるが，同様の証明で (9.29) から

$$(9.32)\qquad \Theta(X, Y) = d\theta(X^H, Y^H), \qquad X, Y \in T_u(L(M))$$

を得る．

$n+n^2$ 個の 1 次微分形式 θ^i, $\omega_j{}^i$ は $L(M)$ の各点 u で $T^*{}_u(L(M))$ の基をなすから，$L(M)$ 上の微分形式は $\theta^i, \omega_j{}^i$ によって表わされる．特に，Θ も Ω も θ^i, $\omega_j{}^i$ によって書けるはずである．一方，(9.31), (9.32) によれば，X か Y が垂直であれば $\Theta(X, Y)$ も $\Omega(X, Y)$ も 0 になる．したがって，Θ も Ω も θ^i のみによって書き表わされることになる．すなわち，

$$\Theta^i = \frac{1}{2}\sum T^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \tag{9.33}$$

$$\Omega_j{}^i = \frac{1}{2}\sum R^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l \tag{9.34}$$

の形に書ける．ここで $T^i{}_{jk}$, $R^i{}_{jkl}$ は $L(M)$ で定義された関数である．

$L(M)$ の局所切断 $\sigma = (e_1, \cdots, e_n)$ で (9.33) を $U \subset M$ に引き戻せば

$$\sigma^*\Theta^i = \frac{1}{2}\sum \sigma^* T^i{}_{jk}\sigma^*\theta^j \wedge \sigma^*\theta^k$$

となるが，$\sigma^* T^i{}_{jk}$ はテンソル場

$$\sum \sigma^* T^i{}_{jk}\sigma^*\theta^j \wedge \sigma^*\theta^k \otimes e_i$$

の成分である．(9.34) についても同様．

問題 9.1 ベクトル束 E に値をとる M 上の 1 次微分形式 ξ に対し，主ファイバー束 P 上に $\boldsymbol{R}^r$ 値の 1 次微分形式 $\tilde{\xi}$ が対応する ((7.5) 参照) が，$E = TM$ の場合 $\xi \in \Gamma(\mathrm{End}\, TM)$ を TM に値をとる M 上の 1 次微分形式とみなせば $L(M)$ 上に $\boldsymbol{R}^r$ 値の 1 次微分形式 $\tilde{\xi}$ が対応する．そのとき，TM の恒等変換 $I_{TM} \in \Gamma(\mathrm{End}\, TM)$ に対応するのが (9.24) で定義された $\theta = (\theta^1, \cdots, \theta^n)$ であることを確かめよ．

問題 9.2 ∇ を M のアフィン接続，X を M の接ベクトル場，L_X を X に関する Lie 微分 (1 章の (6.9) 参照) とする．

$$A_X = L_X - \nabla_X$$

により $A_X : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ を定義する．このとき，A_X はタイプ (1,1) のテンソル場，すなわち，$A_X \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ であることを証明し，さらに

$$A_X Y = -\nabla_Y X - T(X, Y)$$

となることを示せ．

問題 9.3 M のアフィン接続 ∇ に対し，Bianchi の第一および第二恒等式が次のようにも書けることを示せ．

(1) $\mathfrak{S}\{R(X, Y)Z - T(T(X, Y), Z) - (\nabla_X T)(Y, Z)\} = 0, \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

(2) $\mathfrak{S}\{(\nabla_X R)(Y, Z) + R(T(X, Y), Z)\} = 0$

ここで $\mathfrak{S}$ は (9.10) の左辺のように X, Y, Z についての巡回和である．

問題 9.4 M のアフィン接続 ∇ のねじれ率 T が 0 であるとする．M の局所座標 x^1,

$\cdots, x^n$ で表わされた微分形式

$$\alpha = \frac{1}{p!}\sum a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

の外微分 $d\alpha$ を計算するにあたり，次のように共変微分を使えることを示せ.

$$d\alpha = \frac{1}{p!}\sum \nabla_j a_{i_1\cdots i_p} dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$= \frac{1}{(p+1)!}\sum(\nabla_j a_{i_1\cdots i_p} - \nabla_{i_1} a_{j i_2\cdots i_p} - \cdots - \nabla_{i_p} a_{i_1\cdots i_{p-1} j})dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}.$$

§10. テンソル場の共変微分

一般のベクトル束 E に接続が与えられた場合，切断 $\xi\in\Gamma(E)$ の共変微分 $\nabla\xi$ は $E\otimes T^*M$ の切断であった．したがって，T^*M の接続が与えられていない限り $\nabla\xi$ の共変微分 $\nabla^2\xi$ を定義することはできない．しかし，$E=TM$ の場合には TM の接続は T^*M の接続をきめるから，$\nabla\xi\in\Gamma(TM\otimes T^*M)$ の共変微分 $\nabla^2\xi\in\Gamma(TM\otimes T^*M\otimes T^*M)$ を定義できる．もっと一般に ξ がタイプ (r,s) のテンソル場ならば，$\nabla\xi$ はタイプ $(r,s+1)$ のテンソル場として定義される．この節では ξ を局所標構で表わしたときに $\nabla\xi$ を与える公式を求める．

簡単な例を三つ説明すれば一般の場合は自然に明らかになる．はじめの二つは復習である．

TM に接続，すなわち M のアフィン接続 ∇ が一つ与えられているとする．M の開集合 U 上で定義された局所標構 $e_1,\cdots,e_n$ を任意にえらんでおく．$\theta^1,\cdots,\theta^n$ は双対基になるような 1 次微分形式とする．$e_1,\cdots,e_n$ に関する接続形式を $\omega=(\omega_j{}^i)$ とする．

例 1 $\xi=\sum\xi^i e_i\in\Gamma(TM)$．$\nabla$ と $(\omega_j{}^i)$ の定義から，

$$\nabla\xi = \sum d\xi^i\otimes e_i + \sum\xi^i\nabla e_i = \sum d\xi^i\otimes e_i + \sum\xi^i\omega_i{}^j\otimes e_j$$

$$= \sum(d\xi^i + \sum\omega_j{}^i\xi^j)\otimes e_j.$$

ここで

(10.1) $$d\xi^i + \sum \omega_j{}^i \xi^j = \sum \xi^i{}_{,j} \theta^j$$

とおいて $\xi^i{}_{,j}$ を定義すれば

(10.2) $$\nabla\xi = \sum \xi^i{}_{,j} e_i \otimes \theta^j \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$$

を得る．(添字との順を揃えるため，$\theta^j \otimes e_i$ の代わりに $e_i \otimes \theta^j$ と書いた．)

例 2　$\xi = \sum \xi_i \theta^i \in \Gamma(T^*M)$．(1.20) を使って $\nabla\theta^i$ を求め，

$$\nabla\xi = \sum d\xi_i \otimes \theta^i + \sum \xi_i \nabla\theta^i = \sum d\xi_i \otimes \theta^i - \sum \xi_i \omega_j{}^i \otimes \theta^j$$
$$= \sum (d\xi_i - \sum \xi_j \omega_i{}^j) \otimes \theta^i$$

を得る．ここで

(10.3) $$d\xi_i - \sum \xi_j \omega_i{}^j = \sum \xi_{i,j} \theta^j$$

とおいて $\xi_{i,j}$ を定義すれば，

(10.4) $$\nabla\xi = \sum \xi_{i,j} \theta^i \otimes \theta^j \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M) .$$

例 3　$\xi = \sum \xi^i{}_{jk} e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \in \Gamma(TM \otimes T^*M \otimes T^*M)$，

$$\nabla\xi = \sum (d\xi^i{}_{jk} e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k + \xi^i{}_{jk} \nabla e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k$$
$$+ \theta^i{}_{jk} e_i \otimes \nabla\theta^j \otimes \theta^k + \xi^i{}_{jk} e_i \otimes \theta^j \otimes \nabla\theta^k)$$
$$= \sum (d\xi^i{}_{jk} + \sum \xi^l{}_{jk} \omega^i{}_l - \sum \xi^i{}_{lk} \omega^l{}_j - \sum \xi^i{}_{jl} \omega^l{}_k) e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k.$$

ここで

(10.5) $$d\xi^i{}_{jk} + \sum \xi^l{}_{jk} \omega^i{}_l - \sum \xi^i{}_{lk} \omega^l{}_j - \sum \xi^i{}_{jl} \omega^l{}_k = \sum \xi^i{}_{jk,l} \theta^l$$

とおいて $\xi^i{}_{ik,l}$ を定義すれば

(10.6) $$\nabla\xi = \sum \xi^i{}_{jk,l} e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^l$$

を得る．

もっと一般に，ベクトル束 E と接ベクトル束 TM の両方に接続が与えられていれば共変微分

$$\nabla : \Gamma(E \otimes (TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s}) \longrightarrow \Gamma(E \otimes (TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s+1})$$

が定義される．TM の局所標構 $e_1, \cdots, e_n$ と E の局所標構 $b_1, \cdots, b_r$ をとり，TM の接続形式を $\omega = (\omega_j{}^i)$，E の接続形式を $\varphi = (\varphi_\mu{}^\lambda)$ としたとき，例えば

$$\xi = \sum \xi^{\lambda i}{}_j b_\lambda \otimes e_i \otimes \theta^j \in \Gamma(E \otimes TM \otimes T^*M)$$

の共変微分 $\nabla\xi$ は次の式で与えられる．

(10.7) $\nabla\xi = \sum \nabla_k \xi^{\lambda i}{}_j b_\lambda \otimes e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \in \Gamma(E \otimes TM \otimes T^*M \otimes T^*M)$,

ただし，ここで $\nabla_k \xi^{\lambda i}{}_j$ は

(10.8) $d\xi^{\lambda i}{}_j + \sum \varphi_\mu{}^\lambda \xi^{\lambda i}{}_j + \sum \xi^{\lambda k}{}_j \omega_k{}^i - \sum \xi^{\lambda i}{}_k \omega_j{}^k = \sum \nabla_k \xi^{\lambda i}{}_j \theta^k$

によって定義される．

また E に値をとる p 次微分形式 $\xi \in A^p(E)$ の共変外微分 $D\xi \in A^{p+1}(E)$ は E の接続のみに依存し，TM の接続には無関係に定義されたが，捩率形式が 0 であるような TM の接続を使って $D\xi$ を書き表わしておくと便利なことが多い．$\omega = (\omega_j{}^i)$ の捩率が 0 であると，

$$d\theta^i = -\sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j$$

であるから，これを使って，例えば

$$\xi = \sum \xi^\lambda{}_i \theta^i \otimes b_\lambda \in A^1(E)$$

に対して

$$\begin{aligned}(10.9) \qquad D\xi &= \sum d\xi^\lambda{}_i \wedge \theta^i \otimes b_\lambda + \xi^\lambda{}_i d\theta^i \otimes b_\lambda - \xi^\lambda{}_i \theta^i \wedge \varphi_\lambda{}^\mu \otimes b_\mu \\ &= \sum (d\xi^\lambda{}_i - \xi^\lambda{}_j \omega_i{}^j + \varphi_\mu{}^\lambda \xi^\mu{}_i) \wedge \theta^i \otimes b_\lambda \\ &= \sum \nabla_j \xi^\lambda{}_i \theta^j \wedge \theta^i \otimes b_\lambda \\ &= \frac{1}{2} \sum (\nabla_j \xi^\lambda{}_i - \nabla_i \xi^\lambda{}_j) \theta^j \wedge \theta^i \otimes b_\lambda\end{aligned}$$

を得る．一般に E 値 p 次微分形式

$$\xi = \frac{1}{p!} \sum \xi^\lambda{}_{i_1 \cdots i_p} \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p} \otimes b_\lambda \in A^p(E)$$

に対しては，

$$\begin{aligned}(10.10) \qquad D\xi = \frac{1}{(p+1)!} \sum (\nabla_j \xi^\lambda{}_{i_1 \cdots i_p} - \nabla_{i_1} \xi^\lambda{}_{j i_2 \cdots i_p} - \cdots \\ - \nabla_{i_p} \xi^\lambda{}_{i_1 \cdots i_{p-1} j}) \theta^j \wedge \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p} \otimes b_\lambda\end{aligned}$$

を得る．

特に直積束 $E = M \times \boldsymbol{R}$ の自明な接続 $\varphi = (\varphi_\mu{}^\lambda) = 0$ の場合には，(10.10) は通常の外微分 $d\xi$ を共変微分で表わす式になっている（問題 9.4 参照）．

E の接続の曲率を $D\circ D: A^0(E)\to A^2(E)$ として定義したが，これを (10.10) を使って書き表わしてみる．E の切断

$$\eta=\sum \eta^\lambda b_\lambda \in A^0(E)$$

の共変微分 $D\eta\in A^1(E)$ を (10.9) の ξ としてみると

$$D^2\eta=\frac{1}{2}\sum(\nabla_i\nabla_j\eta^\lambda-\nabla_j\nabla_i\eta^\lambda)\theta^i\wedge\theta^j\otimes b_\lambda \tag{10.11}$$

を得る．一方，曲率 R の定義 $R=D\circ D$ および R の局所表示

$$Rb_\mu=\sum R^\lambda{}_\mu b_\lambda, \qquad R^\lambda{}_\mu=\frac{1}{2}\sum R^\lambda{}_{\mu ij}\theta^i\wedge\theta^j$$

を使うと

$$D^2\eta=R\eta=\frac{1}{2}\sum R^\lambda{}_{\mu ij}\eta^\mu\theta^i\wedge\theta^j \tag{10.12}$$

となる．(10.11) と (10.12) を比べると，次の **Ricci の恒等式** (Ricci's identity) を得る．

$$\sum(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)\eta=\sum R^\lambda{}_{\mu ij}\eta^\mu b_\lambda. \tag{10.13}$$

特に，$E=(TM)^{\otimes r}\otimes(T^*M)^{\otimes s}$ に対して (10.13) を適用してみる．捩率 0 の M のアフィン接続の場合，例えば $r=1$, $s=2$ ならば

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\xi^i{}_{jk}=\sum R^i{}_{lab}\xi^l{}_{jk}-\sum\xi^i{}_{lk}R^l{}_{jab}-\sum\xi^i{}_{jl}R^l{}_{kab}. \tag{10.14}$$

これが通常 Ricci の恒等式と呼ばれるもので，(10.13) はその一般化と考えられる．また，これは (9.18) において，捩率を 0 とした式にほかならない．

問題 10.1　M のアフィン接続 ∇ に対し，問題 9.3 で証明した Bianchi の恒等式は，テンソル記号では

(1)　$\underset{j,k,l}{\mathfrak{S}}\left(R^i{}_{jkl}-\frac{1}{2}\sum_m T^i{}_{mj}T^m{}_{kl}-\nabla_k T^i{}_{lj}\right)=0$

(2)　$\underset{k,l,m}{\mathfrak{S}}\left(\nabla_m R^i{}_{jkl}+\frac{1}{2}\sum_h R^i{}_{jhl}T^h{}_{mk}\right)=0$

となることを確かめよ（ただし，$\mathfrak{S}$ は巡回和を表わす）．

§11. アフィン接続の測地線

多様体 M にアフィン接続 ∇ が与えられているとする．M 上の曲線 c が局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ を使って

$$x^i = x^i(t)$$

で与えられているとする． c の速度ベクトル $\sum \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$ を $\dot{c}$ と書き，

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0 \tag{11.1}$$

が成り立つとき，c を **測地線** (geodesic) と呼ぶ．前節の言葉でいえば，(11.1) は c に沿ったベクトル場 $\dot{c}$ が平行なことである．(9.19) で導入した Christoffel の記号 $\Gamma^i{}_{jk}$ を使うと，(11.1) は

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum \Gamma^i{}_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \qquad i = 1, \cdots, n \tag{11.2}$$

と書ける．上の微分方程式の系を

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \xi^i, \\ \dfrac{d\xi^i}{dt} = -\sum \Gamma^i{}_{jk} \xi^j \xi^k \end{cases} \tag{11.3}$$

と書き直してみれば，初期条件 $x^i(0)$，$\frac{dx^i}{dt}(0)$ が与えられたとき，充分 0 に近い t に対しては解 $x^i(t)$ がただ一つ存在することがわかる．すなわち，M の点 x_0 と，接ベクトル $X_0 \in T_{x_0}M$ が与えられると，x_0 を速度 X_0 で出発する測地線 $x(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ が一意に定まる．点 $x(t)$ を $\exp tX_0$ とも書く． $X_0 \in T_{x_0}M$ に $x(1) = \exp X_0$ を対応させることにより **指数写像** (exponential map)

$$\exp : T_{x_0}M \longrightarrow M \tag{11.4}$$

が定義される．(11.2) の解は 0 に充分近い t の範囲でしか解の存在は保証されていないから，正確には，(11.4) は原点の近傍でしか定義されていない．(11.4) で基点を強調したいときには $\exp_{x_0}$ と書く． 微分方程式 (11.3) で初期条件がなめらかに変われば解もなめらかに変わるから，

(11.5) $$\exp : TM \longrightarrow M$$

はC^∞である．ここでも，expはTMの0の近傍でしか一般には定義されていないことに注意しておく．もし，expがTM全体で定義されているときには，接続∇が**完備** (complete) であるという．これはすべての測地線$\exp tX$ $(X \in TM)$が$-\infty < t < \infty$までのびるということである．

指数写像$\exp_{x_0} : T_{x_0}M \to M$の原点$0 \in T_{x_0}M$における微分

(11.6) $$(\exp_{x_0})_{*0} : T_0(T_{x_0}M) \longrightarrow T_{x_0}M$$

を考えてみる．$T_0(T_{x_0}M)$は$T_{x_0}M$と自然に同一視されるから(11.6)は$T_{x_0}M$から$T_{x_0}M$への写像と考えられる．そのとき，$T_{x_0}M$の曲線（とはいっても直線）tX_0は$\exp_{x_0}$でX_0を出発時の速度ベクトルとする測地線$\exp_{x_0}tX_0$に移るから，$\exp_{x_0}$の微分でX_0がX_0に移る．したがって，(11.6)は$T_{x_0}M$の恒等写像である．特に，$\exp_{x_0}$は原点で正則（非特異）であるから逆写像定理により$\exp_{x_0}$は$T_{x_0}M$の原点の近傍をx_0の近傍に微分同相に移す．このようにして，$T_{x_0}M$の自然な座標系をx_0の近傍の局所座標系とすることができるが，これをx_0における**正規座標系** (normal coordinate system) と呼ぶ．$(x^1, \cdots, x^n)$をそのような局所座標とすると，x_0を起点とする測地線は

(11.7) $$x^i = a^i t$$

の形に書けることになる．これを測地線の微分方程式(11.2)に代入してみると，

(11.8) $$\sum_{j,k} \Gamma^i{}_{jk}(a^1 t, \cdots, a^n t)\, a^j a^k = 0\,, \qquad i = 1, \cdots, n$$

となる．したがって，$t = 0$とおいて

$$\sum \Gamma^i{}_{jk}(x_0)\, a^j a^k = 0\,.$$

これがすべての$(a^1, \cdots, a^n)$に対して成り立つから，

(11.9) $$\Gamma^i{}_{jk}(x_0) + \Gamma^i{}_{kj}(x_0) = 0\,, \qquad i, j, k = 1, \cdots, n$$

を得る．すなわち，正規座標系の原点では$\Gamma^i{}_{jk} + \Gamma^i{}_{kj}$は0となる．この事実は$\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$のとき，すなわち，ねじれ率が0のときには特に便利である．

その場合には原点 x_0 で $\Gamma^i{}_{jk}$ は 0 となるから，テンソル場の共変微分を正規座標系によって計算する場合，x_0 における共変微分では $\Gamma^i{}_{jk}$ の入っている項は消え，普通の微分と同じことになる．

3
リーマン幾何

この章ではリーマン幾何のほんの一部に触れるのに過ぎない．§1から§4まではLevi-Civita接続の説明である．前章の復習的なことが多い．共形変換はかなり特殊なトピックであるが後でゲージ理論を学ぶときに必要となる．定曲率空間は共形的に平坦な空間としても大切なので§6で扱うことにした．Hodgeの調和積分の理論は，証明まで付けるとそれだけで1章は費やさねばならないので，主定理を説明し証明の一番難しいところがどこであるかをはっきりさせるに止めた．調和積分を使うという立場からはこれで充分であろう．

§1. 部分多様体

$\boldsymbol{R}^N$ を N 次元ユークリッド空間, M を n 次元部分多様体とする. $k=N-n$ とおく.

$\boldsymbol{y}=(y^1,\cdots,y^N)$ を $\boldsymbol{R}^N$ の自然な座標系, $(x^1,\cdots,x^n)$ を M の局所座標系とすると, $M\subset\boldsymbol{R}^N$ は局所的に

$$(1.1)\qquad y^1=y^1(x^1,\cdots,x^n),\qquad \cdots\quad ,\quad y^N=y^N(x^1,\cdots,x^n)$$

の形に表わされ, 行列 $(\partial y^\alpha/\partial x^i)$ の階数は n である. (1.1) をベクトル記号で

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x^1,\cdots,x^n)$$

と書くと便利である.

以下の計算はすべて上の座標系のもとでの局所的なものである. また添字の動く範囲を次のように約束しておく.

$$1\leqq\alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqq N,$$
$$1\leqq h,i,j,\cdots\leqq n,$$
$$n+1\leqq p,q,r,\cdots\leqq N.$$

各点 $x\in M$ で M の接空間 T_xM は $T_x\boldsymbol{R}^N\approx\boldsymbol{R}^N$ の n 次元部分空間だが, その直交補空間 $T_x{}^\perp M$ を x における M の **法空間** (normal space) と呼ぶ. 定義により

$$(1.2)\qquad T_x\boldsymbol{R}^N\approx\boldsymbol{R}^N=T_xM\oplus T_x{}^\perp M.$$

1章 §1で, 接ベクトル束 $TM=\bigcup_{x\in M}T_xM$ を定義した. 同様に $T^\perp M=\bigcup_{x\in M}T_x{}^\perp M$ も M 上のベクトル束になる. これを部分多様体 $M\subset\boldsymbol{R}^N$ の **法ベクトル束** (normal bundle) と呼ぶ.

$\boldsymbol{R}^N$ の接ベクトル束 $T\boldsymbol{R}^N$ は直積であるから, それを M に制限したベクトル束 $T\boldsymbol{R}^N|_M$ も直積

$$T\boldsymbol{R}^N|_M=M\times\boldsymbol{R}^N$$

で, (1.2) により

$$TR^N|_M = TM \oplus T^{\perp}M \tag{1.3}$$

と直和に分解する．

R^N の自然な内積が，各 T_xM および $T_x{}^{\perp}M$ に内積を定義する．したがって，TM と $T^{\perp}M$ は共に自然に定義された内積をもったベクトル束である．2章の (4.12) のように T_xM の正規直交基 $e_1, \cdots, e_n$ の全体を $O_x(M)$，そして

$$O(M) = \bigcup_{x \in M} O_x(M) \tag{1.4}$$

とおいて，M 上に $O(n)$ を構造群とする主ファイバー束を得る．TM に同伴する，この主ファイバー束 $O(M)$ を M の **正規直交標構束** (bundle of orthonormal frames) と呼ぶ．同様に $T_x{}^{\perp}M$ の正規直交基 $e_{n+1}, \cdots, e_{n+k}$ の集合を $O_x{}^{\perp}(M)$，そして

$$O^{\perp}(M) = \bigcup_{x \in M} O_x{}^{\perp}(M) \tag{1.5}$$

とおけば，$O^{\perp}(M)$ は $T^{\perp}M$ に同伴する主ファイバー束で，その構造群は $O(k)$ である．

ユークリッド空間の部分多様体は一般の多様体より直観的には理解しやすいが T_xR^N と R^N を同一視するため，注意しないと，まぎらわしいことが起きる．ここで (1.2) の $T_xM \subset T_xR^N \approx R^N$ の意味をはっきりさせておこう．M 上の曲線 $(x^1(t), \cdots, x^n(t))$ は R^N 上の曲線

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}(x^1(t), \cdots, x^n(t))$$

とも考えられる．その速度ベクトルは，それぞれ

$$\sum \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{および} \quad \sum \frac{dy^\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \sum \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

で表わされる．したがって，対応 $T_xM \subset T_xR^N \approx R^N$ は次のように与えられる．

$$\begin{array}{ccccc} T_xM & \longrightarrow & T_xR^N & \longrightarrow & R^N, \\ \sum a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} & \longrightarrow & \sum \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} a^i \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha} & \longrightarrow & \sum \dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x^i} a^i \end{array} \tag{1.6}$$

$$\text{ただし，} \sum \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x^i} a^i = \left(\sum \frac{\partial y^1}{\partial x^i} a^i, \ \cdots, \ \sum \frac{\partial y^N}{\partial x^i} a^i \right).$$

さて，y^α を M 上の関数，dy^α を M 上の 1 次微分形式，$d\boldsymbol{y} = (dy^1, \cdots, dy^N)$ を $\boldsymbol{R}^N$ 値の 1 次微分形式と考えたとき，$d\boldsymbol{y}$ の $\sum a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ での値は

(1.7)
$$d\boldsymbol{y}\left(\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x^i} a^i$$

であるから，これを (1.6) と比べ，$\boldsymbol{v} = \sum a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$ と書くと，(1.7) は

(1.8)
$$d\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^N$$

となる．(左辺の $\boldsymbol{v}$ は $T_x M$ の元で，右辺の $\boldsymbol{v}$ は (1.9) によって対応する $\boldsymbol{R}^N$ の元である)．(1.8) によれば，$\boldsymbol{R}^N$ の微分形式 $d\boldsymbol{y}$ は M 上では実は TM に値をとる．したがって，M の（局所）正規直交標構 $e_1, \cdots, e_n$ を使って

(1.9)
$$d\boldsymbol{y} = \sum \theta^i e_i$$

と書ける（$e_{n+1}, \cdots, e_N \in T^\perp M$ は必要としない）．ここで $\theta^1, \cdots, \theta^n$ は M で局所的に定義された 1 次微分形式である．(1.8) で $\boldsymbol{v} = e_j$ とおき (1.9) を使うと，

$$e_j = d\boldsymbol{y}(e_j) = \sum \theta^i(e_j) e_i$$

となるから

(1.10)
$$\theta^i(e_j) = \delta^i{}_j$$

を得る．すなわち，$\theta^1, \cdots, \theta^n$ は $e_1, \cdots, e_n$ の双対基となっている．

接ベクトル束 TM に定義された内積を g と書く．$\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ が局所的に $T_x M$ の基であるから，g は

(1.11)
$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

によって定まる．(1.6) によれば $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$ は $\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x^i} = \left(\dfrac{\partial y^1}{\partial x^i}, \cdots, \dfrac{\partial y^N}{\partial x^i}\right) \in \boldsymbol{R}^N$ に対応するから

(1.12)
$$g_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x^j} = \sum \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}$$

となる．行列 (g_{ij}) は対称で正値である．

任意の接ベクトル場 $X=\sum \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$Y=\sum \eta^i \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ に対し

$$g(X, Y)=\sum g_{ij}\xi^i\eta^j \tag{1.13}$$

であるから

$$g=\sum g_{ij}dx^i dx^j \tag{1.14}$$

と書く習慣がある．(1.12) を使えば (1.14) は

$$g=d\boldsymbol{y}\cdot d\boldsymbol{y}=\sum dy^\alpha dy^\alpha \tag{1.15}$$

とも書ける．(1.9) を使えば (1.15) は

$$g=\sum \theta^i\theta^i \tag{1.16}$$

とも書ける．g を部分多様体 $M\subset \boldsymbol{R}^N$ の **第一基本形式** (first fundamental form) あるいは **リーマン計量** (Riemannian metric) と呼ぶ．

問題 1.1　単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の北極 $\mathrm{N}=(0,0,1)$ から立体射影によりN以外の球面の点 $\mathrm{P}=(x,y,z)$ と平面 $z=0$ の点 $\mathrm{P}'=(u,v,0)$ の間に 1：1 の対応がつく．

（i）(x,y,z) を (u,v) の関数として書け．（これによって，球面が (N を除いて) (1.1) の形に表わせたことになる．）

（ii）球面のリーマン計量を (u,v) で表わせ．（すなわち (1.14) の形に第一基本形式を書け．）

§2.　部分多様体の接続

この節でも M はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の中の n 次元部分多様体とし，前節の記号を踏襲する．2章 §1 で一般のベクトル束の接続を考えた．この節では，接ベクトル束 TM と法ベクトル束 $T^\perp M$ に $\boldsymbol{R}^N$ から自然に導入される接続について説明する．

いま，X を M 上の接ベクトル場とする．それは，TM の切断である．$TM\subset T\boldsymbol{R}^N|_M=M\times \boldsymbol{R}^N$ ((1.6) 参照) であるから，X は $\boldsymbol{R}^N$ 値の M 上の関数と

考えられる．すなわち，

$$X : M \longrightarrow \boldsymbol{R}^N .$$

したがって，dX は $\boldsymbol{R}^N$ 値の 1 次微分形式である． 分解 (1.2) を dX に適用して，

$$dX = \nabla X + A_X \tag{2.1}$$

と書く． ここで，∇X は TM 値， A_X は $T^\perp M$ 値の 1 次微分形式である． ∇X も A_X も X に関して線形なのは明らか． f を M 上の関数としたとき，

$$d(fX) = df \cdot X + f \cdot dX$$

の TM と $T^\perp M$ の成分を比べて

$$\nabla(fX) = df \cdot X + f \cdot \nabla X , \tag{2.2}$$

$$A_{fX} = f \cdot A_X \tag{2.3}$$

を得る． (2.2) は ∇ が接ベクトル束 TM の接続， すなわちアフィン 接続であることを 示している． これが， 部分多様体 M の **Levi-Civita 接続** である． 一方，(2.3) は各点 $x \in M$ において，$A_X : T_xM \to T_x{}^\perp M$ は X_x にしか依存しないことを示している（2 章 問題 1.1 参照)．したがって，双線形写像

$$\begin{aligned} A : TM \times TM &\longrightarrow T^\perp M , \\ (X, Y) &\longmapsto A(X, Y) = A_X(Y), \qquad X, Y \in T_xM \end{aligned} \tag{2.4}$$

が定義される． A を部分多様体 $M \subset \boldsymbol{R}^N$ の**第二基本形式** (second fundamental form) と呼ぶ．

同様に M の法ベクトル場，すなわち $T^\perp M$ の切断 ξ を写像

$$\xi : M \longrightarrow \boldsymbol{R}^N$$

とみなし，

$$d\xi = B_\xi + \nabla^\perp \xi \tag{2.5}$$

と書く． ここで B_ξ は TM 値， $\nabla^\perp \xi$ は $T^\perp M$ の 1 次微分形式である． (2.2), (2.3) と同様に，M 上の関数 f に対して

(2.6) $$\nabla^{\perp}(f\xi) = df\cdot\xi + f\cdot\nabla^{\perp}\xi,$$

(2.7) $$B_{f\xi} = f\cdot B_{\xi}$$

を得る．したがって，$\nabla^{\perp}$ は法ベクトル束 $T^{\perp}M$ に接続を定義する．これは **Van der Waerden–Bortolotti 接続**と呼ばれる．また (2.7) から双線形写像

(2.8) $$B: T^{\perp}M \times TM \longrightarrow TM$$
$$(\xi, X) \longmapsto B(\xi, X) = B_{\xi}(X)$$

を得る．後に示すように，A と B は本質的に同じものである．その前に，上の接続 $\nabla, \nabla^{\perp}$ は $TM, T^{\perp}M$ の内積を保つことを証明しておく．

M の接ベクトル場 X, Y の内積 $g(X, Y) = X\cdot Y$ は M 上の関数である．$A_X \perp Y$ および $A_Y \perp X$ に注意すると，(2.1) から

(2.9) $$d(X\cdot Y) = dX\cdot Y + X\cdot dY = \nabla X\cdot Y + X\cdot\nabla Y$$

を得る．同様に M の法ベクトル場 ξ, η に対しても同様に

(2.10) $$d(\xi\cdot\eta) = \nabla^{\perp}\xi\cdot\eta + \xi\cdot\nabla^{\perp}\eta$$

を得る．(2.9) と (2.10) は ∇, $\nabla^{\perp}$ がそれぞれ $TM, T^{\perp}M$ の内積を保つ接続であることを示している．

A と B の関係を知るには，接ベクトル場 X と法ベクトル場 η の内積を微分すればよい．$X\cdot\eta = 0$ であるから

$$0 = d(X\cdot\eta) = (\nabla X + A_X)\cdot\eta + X\cdot(\nabla\eta + B\eta) = A_X\cdot\eta + X\cdot B\eta.$$

したがって

(2.11) $$A_X\cdot\eta + X\cdot B_{\eta} = 0, \qquad X\in\Gamma(TX),\ \eta\in\Gamma(T^{\perp}M).$$

接ベクトル場 X, Y を写像 $M\to \boldsymbol{R}^N$ とみなしたとき，接ベクトル場 $[X, Y]$ に対応する写像 $M\to\boldsymbol{R}^N$ は $\boldsymbol{R}^N$ 値の関数 $dY(X) - dX(Y)$ で与えられることを示そう．対応 (1.6) を使うと

(2.12)
$$X = \sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i} \longrightarrow (X^1, \cdots, X^N) \quad ただし，\quad X^{\alpha} = \sum\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^i}a^i,$$
$$Y = \sum b^i\frac{\partial}{\partial x^i} \longrightarrow (Y^1, \cdots, Y^N) \quad ただし，\quad Y^{\alpha} = \sum\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^i}b^i$$

と対応する．したがって

$$(2.13)\qquad Z=[X,Y]=\sum\left(a^i\frac{\partial b^i}{\partial x^j}-b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\longrightarrow(Z^1,\cdots,Z^N),$$

$$\text{ただし,}\quad Z^\alpha=\sum\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\left(a^j\frac{\partial b^i}{\partial x^j}-b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)$$

と対応する．書き直して

$$Z^\alpha=\sum\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}b^i\right)a^j-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}a^i\right)b^j\right\}$$

$$=\sum\left\{\frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^j}a^j-\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^j}b^j\right\}=dY^\alpha(X)-dX^\alpha(Y)\,.$$

対応する元を同一視して

$$(2.14)\qquad [X,Y]=dY(X)-dX(Y)$$

と書く．

(2.1) から

$$dX(Y)=\nabla_Y X+A(X,Y)$$

を得る．X と Y を入れ代えて，

$$dY(X)=\nabla_X Y+A(Y,X)\,.$$

したがって，(2.14) を使って

$$[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X+A(Y,X)-A(X,Y)\,.$$

両辺の接成分と法成分を比べて

$$(2.15)\qquad [X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X\,,$$

$$(2.16)\qquad A(X,Y)=A(Y,X)$$

を得る．(2.15) はアフィン接続 ∇ のねじれ率が 0 であることを示している．

次に $TM, T^\perp M$ の接続の曲率を計算する．接ベクトル場 X, Y, Z のうち，Z を M 上の $\boldsymbol{R}^N$ 値の関数と考え，$Y(Z)$ は Z の Y 方向の微分，すなわち $Y(Z)=\iota_Y dZ=dZ(Y)$ とする．$XY(Z)$ はそれをさらに X 方向に微分したものとする．同様に法ベクトル場 ξ に対しても $Y(\xi)=\iota_Y d\xi=d\xi(Y)$．(2.1) より

$$(2.17)\qquad Y(Z)=\nabla_Y Z+A(Z,Y)\,.$$

ここで，$\nabla_Y Z$ は接ベクトル場，$A(Z, Y)$ は法ベクトル場であるから，(2.1) と (2.5) を使って

$$XY(Z) = X(\nabla_Y Z) + X(A(Z, Y))$$
$$= \nabla_X \nabla_Y Z + A(\nabla_Y Z, X) + B(A(Z, Y), X) + \nabla_X{}^{\perp}(A(Z, Y)).$$

X と Y を入れかえた式との差を計算して

$$(2.18)\quad [X, Y](Z) = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z + B(A(Z, Y), X)$$
$$- B(A(Z, X), Y) + A(\nabla_Y Z, X) - A(\nabla_X Z, Y)$$
$$+ \nabla^{\perp}{}_X(A(Z, Y)) - \nabla^{\perp}{}_Y(A(Z, X)).$$

一方，左辺は (2.1) により

$$(2.19)\quad [X, Y](Z) = \nabla_{[X, Y]} Z + A(Z, [X, Y])$$

(2.18) と (2.19) の接成分，法成分を比べて（2章 (2.8) 参照）

$$(2.20)\quad R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) Z$$
$$= B(A(Z, X), Y) - B(A(Z, Y), X),$$

$$(2.21)\quad \nabla^{\perp}{}_X(A(Z, Y)) - A(\nabla_X Z, Y)$$
$$= \nabla^{\perp}{}_Y(A(Z, X)) - A(\nabla_Y Z, X) + A(Z, [X, Y])$$

を得る．接ベクトル場 W と (2.20) の内積をとり，(2.11) を使うと右辺は B を使わず A だけで書き表わすことができる．実際，

$$(2.22)\quad g(R(X, Y)Z, W)$$
$$= -A(Z, X) \cdot A(W, Y) + A(Z, Y) \cdot A(W, X).$$

曲率 R を第二基本形式で表わすこの式を **Gauss の方程式**(equation of Gauss) と呼ぶ．(2.21) をもう少し簡単にするために，まず第二基本形式 A は $T^*M \otimes T^*M \otimes T^{\perp}M$ の切断であることに注意する．このベクトル束にも TM の接続 ∇ と $T^{\perp}M$ の接続 $\nabla^{\perp}$ から自然に接続が入る（2章 (2.18)～(2.21) 参照)．それを ∇^* と書くことにすると，

$$\nabla^{\perp}{}_X(A(Z, Y)) = (\nabla^*{}_X A)(Z, Y) + A(\nabla_X Z, Y) + A(Z, \nabla_X Y),$$
$$\nabla^{\perp}{}_Y(A(Z, X)) = (\nabla^*{}_Y A)(Z, X) + A(\nabla_Y Z, X) + A(Z, \nabla_Y X).$$

これを (2.21) に代入し (2.15) を使えば

(2.23) $$(\nabla^*{}_X A)(Z, Y) = (\nabla^*{}_Y A)(Z, X)$$

を得る． これを **Codazzi の方程式** (equation of Codazzi) と呼ぶ． $A(Z, Y)$ は Z と Y に関して対称であるが，(2.23) は3線形写像

(2.24) $$\nabla^* A : TM \times TM \times TM \longrightarrow T^{\perp}M,$$
$$\nabla^* A(X, Y, Z) = (\nabla^*{}_X A)(Y, A)$$

が対称であるということにほかならない．

法ベクトル場 ξ に対し $[X, Y](\xi)$ を同様に計算することにより

(2.25) $$R^{\perp}(X, Y)\xi = (\nabla^{\perp}{}_X \nabla^{\perp}{}_Y - \nabla^{\perp}{}_Y \nabla^{\perp}{}_X - \nabla^{\perp}{}_{[X,Y]})\xi$$
$$= A(B(\xi, X), Y) - A(B(\xi, Y), X)$$

を得る．(2.25) と法ベクトル場 η との内積をとれば

(2.26) $$g(R^{\perp}(X, Y)\xi, \eta) = g(B(\xi, Y), B(X, \eta)) - g(B(\xi, X), B(\eta, Y))$$

となる． これは **Ricci の方程式** (equation of Ricci) と呼ばれる． (2.25) と (2.26) の証明は読者にまかせる (問題 2.1 参照)．

問題 2.1 等式 (2.25) を証明せよ． その際，$[X, Y]\xi$ の接成分から得られる式はすでに知っている式であることも確かめよ．

§3. 部分多様体の接続(動標構の方法)

前節と同じく，M はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の中の n 次元部分多様体とする． そして前節の結果を TM の局所標構 $e_1, \cdots, e_n$，$T^{\perp}M$ の局所標構 $e_{n+1}, \cdots, e_{n+k}$ を使って復習する．

§1 のように，$e_1, \cdots, e_n$ も $e_{n+1}, \cdots, e_{n+k}$ も共に正規直交基になっているとする．M を (1.1) のように

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x^1, \cdots, x^n)$$

で表わすと，(1.9) により

(3.1) $$d\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \theta^i e_i .$$

ここで$\theta^1, \cdots, \theta^n$は$e_1, \cdots, e_n$の双対基になっている.

de_iは$\boldsymbol{R}^N$に値をもつ1次微分形式だから

$$(3.2) \qquad de_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_i{}^j e_j + \sum_{q=n+1}^{n+k} \omega_i{}^q e_q\,, \qquad i = 1, \cdots, n$$

と書ける. これを(2.1)と比べると

$$(3.3) \qquad \nabla e_i = \sum \omega_i{}^j e_j\,, \qquad A_{e_i} = \sum \omega_i{}^q e_q\,.$$

同様に

$$(3.4) \qquad de_p = \sum \omega_p{}^j e_j + \sum \omega_p{}^q e_q\,, \qquad p = n+1,\ \cdots,\ n+k = N\,.$$

これを(2.5)と比べて

$$(3.5) \qquad \nabla^{\perp} e_p = \sum \omega_p{}^q e^q\,, \qquad B_{e_p} = \sum \omega_p{}^j e_j$$

を得る. $e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \cdots, N)$ であるから, これを微分して

$$(3.6) \qquad 0 = d(e_\alpha \cdot e_\beta) = de_\alpha \cdot e_\beta + e_\alpha \cdot de_\beta$$
$$= \sum \omega_\alpha{}^\gamma e_\gamma \cdot e_\beta + \sum e_\alpha \cdot \omega_\beta{}^\gamma e_\gamma = \omega_\alpha{}^\beta + \omega_\beta{}^\alpha$$

すなわち, 1次微分形式$\omega_\alpha{}^\beta$のつくる行列

$$(3.7) \qquad (\omega_\alpha{}^\beta) = \begin{pmatrix} \omega_i{}^j & \omega_p{}^j \\ \omega_i{}^q & \omega_p{}^q \end{pmatrix}$$

は交代行列である. これは次のことを意味する.

(i)　TMの接続∇を与える接続行列$(\omega_i{}^j)$は交代行列,

(ii)　$T^{\perp}M$の接続$\nabla^{\perp}$を与える接続行列$(\omega_p{}^q)$は交代行列,

(iii)　A, Bを与える$(\omega_i{}^q)$, $(\omega_p{}^j)$の間に$\omega_i{}^q = -\omega_q{}^i$という関係がある.

(i), (ii)は$\nabla, \nabla^{\perp}$が$TM, T^{\perp}M$の内積を保つ接続になっていることを表わし(2章の(3.6)参照), (iii)はA, B間の関係(2.11)にほかならない.

次に(3.1)の外微分を(3.2)と(3.4)を使って計算して

$$0 = d(d\boldsymbol{y}) = \sum d\theta^i e_i - \sum \theta^i \wedge de_i$$
$$= \sum d\theta^i e_i - \sum \theta^i \wedge \omega_i{}^j e_j - \sum \theta^i \wedge \omega_i{}^p e_p$$
$$= \sum (d\theta^i + \sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j) e_i + \sum \omega_i{}^p \wedge \theta^i e_p$$

を得る. したがって

$$(3.8)\qquad d\theta^i = -\sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j, \qquad i = 1, \cdots, n,$$

$$(3.9)\qquad \sum \omega_i{}^p \wedge \theta^i = 0, \qquad p = n+1, \cdots, n+k = N.$$

まず (3.8) は (2.15) と同値である．（これを証明するには，1 章の (2.11) により $d\theta^i(e_j, e_k) = -\frac{1}{2}\theta^i([e_j, e_k])$ となることを使えばよい.） 次に (3.9) を考える．$\theta^1, \cdots, \theta^n$ は T^*M の基だから

$$(3.10)\qquad \omega_i{}^p = \sum h^p{}_{ij}\theta^j, \qquad i = 1, \cdots, n, \quad p = n+1, \cdots, n+k$$

と書ける．これを (3.9) に代入すると

$$(3.11)\qquad h^p{}_{ij} = h^p{}_{ji}, \qquad i, j = 1, \cdots, n, \quad p = n+1, \cdots, n+k$$

を得る．第二基本形式 A は (3.3), (2.4) により

$$(3.12)\qquad A = \sum h^p{}_{ij}\theta^i\theta^j e_p$$

と書ける（$\sum h^p{}_{ij}\theta^i \otimes \theta^j \otimes e_p$ のテンソル積の記号は略す）．実際

$$A(e_i, e_j) = A_{e_i}(e_j) = \sum \omega_i{}^p(e_j)e_p = \sum h^p{}_{ij}e_p.$$

したがって，(3.11)（すなわち (3.9)）は (2.16) と同値である．

(3.2) と (3.4) を外微分すると

$$(3.13)\qquad 0 = \sum (d\omega_i{}^j - \sum \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j - \sum \omega_i{}^q \wedge \omega_q{}^j)e_j + \sum (d\omega_i{}^q - \sum \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^q - \sum \omega_i{}^p \wedge \omega_p{}^q)e_q,$$

$$(3.14)\qquad 0 = \sum (d\omega_p{}^j - \sum \omega_p{}^k \wedge \omega_k{}^j - \sum \omega_p{}^q \wedge \omega_q{}^j)e_j + \sum (d\omega_p{}^q - \sum \omega_p{}^k \wedge \omega_k{}^q - \sum \omega_p{}^r \wedge \omega_r{}^q)e_q$$

となる．これから，次の三式を得る．

$$(3.15)\qquad d\omega_i{}^j + \sum \omega_k{}^j \wedge \omega_i{}^k = \Omega_i{}^j, \quad \text{ここで}, \quad \Omega_i{}^j = \sum \omega_i{}^q \wedge \omega_q{}^j,$$

$$(3.16)\qquad d\omega_p{}^q + \sum \omega_r{}^q \wedge \omega_p{}^r = \Omega_p{}^q, \quad \text{ここで}, \quad \Omega_p{}^q = \sum \omega_p{}^k \wedge \omega_k{}^q,$$

$$(3.17)\qquad d\omega_i{}^q + \sum \omega_k{}^q \wedge \omega_i{}^k + \sum \omega_p{}^q \wedge \omega_i{}^p = 0.$$

(3.14) から得られるもう一つの式は (3.17) の転置に過ぎない．(3.15) は TM の接続 ∇ の構造方程式で $(\Omega_i{}^j)$ がその曲率，(3.16) は $T^\perp M$ の接続 $\nabla^\perp$ の構造方程式で $(\Omega_p{}^q)$ がその曲率である．(3.10) のように ((3.6) も参照)

$$\omega_i{}^q = h^q{}_{ij}\theta^j = -\omega_q{}^i$$

とおいて，(3.15), (3.16) の曲率の定義式に代入すれば

$$(3.18)\qquad \Omega_i{}^j = \frac{1}{2}\sum (h^q{}_{il}h^q{}_{jk} - h^q{}_{ik}h^q{}_{jl})\theta^k \wedge \theta^l, \qquad \text{(Gauss の式)},$$

$$(3.19)\qquad \Omega_p{}^q = \frac{1}{2}\sum (h^p{}_{il}h^q{}_{ik} - h^p{}_{ik}h^q{}_{il})\theta^k \wedge \theta^l \qquad \text{(Ricci の式)}$$

を得るが，これはそれぞれ前節で証明したGauss の方程式と Ricci の方程式である ((2.22)，(2.25) を参照).

(3.17) からは同様にして

$$\sum (dh^q{}_{ij} - \sum h^q{}_{ik}\omega_j{}^k - \sum h^q{}_{kj}\omega_i{}^k + \sum \omega_p{}^q h^p{}_{ij}) \wedge \theta^j = 0$$

を得る．そこで

$$(3.20)\qquad dh^q{}_{ij} - \sum h^q{}_{ik}\omega_j{}^k - \sum h^q{}_{kj}\omega_i{}^k + \sum \omega_p{}^q h^p{}_{ij} = \sum h^q{}_{ij,k}\theta^k$$

とおいて $h^q{}_{ij,k}$ を定義すると $\sum h^q{}_{ij,k}\theta^k \wedge \theta^j = 0$ だから

$$(3.21)\qquad h^q{}_{ij,k} = h^q{}_{ik,j} \qquad \text{(Codazzi の式)}$$

を得る．我々はすでに $h^q{}_{ij} = h^q{}_{ji}$ を知っているから，これは $h^q{}_{ij,k}$ が (i,j,k) に関して対称であることを意味する．(3.21) は前節の Codazzi の方程式(2.23) にほかならない．

(3.20) で定義した $h^q{}_{ij,k}$ は第二基本形式 $A = \sum h^q{}_{ij}e_q \otimes \theta^i \otimes \theta^j$ の共変微分 $\nabla^* A$ の成分である．すなわち，

$$(3.22)\qquad \nabla^* A = \sum h^q{}_{ij,k}e_q \otimes \theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k$$

ここで A はベクトル束 $T^\perp M \otimes T^*M \otimes T^*M$ の切断．∇^* は $T^\perp M$ の接続 (Van der Waerden–Bortolotti 接続) と (TM の Levi–Civita 接続によって与えられる) T^*M の接続から構成された接続である．これは前章 (10.7) で $E = T^\perp M$ とした場合になる．

問題 3.1 R^{n+1} 内の半径 r の球面 $S^n(r)$ にこの節の方法を適用して第二基本形式，曲率を求めよ．

§4. リーマン多様体の接続

この節では，M は n 次元多様体とする．ユークリッド空間の部分多様体と

は限らない．TM をその接ベクトル束とする．TM で定義された内積 g を M の**リーマン計量** (Riemannian metric) と呼ぶ．すなわち，各点 $x \in M$ で g は接空間 T_xM に内積 g_x を定義する．さらに g_x は x に関して微分可能と仮定する（ベクトル束の内積については2章§3参照)．§1で説明したように，M がユークリッド空間の部分多様体ならば，M には自然にリーマン計量が定義される．しかし，この節では，M に与えられた任意のリーマン計量について論じる．(1.14) のように，M の局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$ に関して，g を

$$(4.1)\qquad g = \sum g_{ij}dx^i dx^j \qquad \left(ここで\ g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)$$

と書く．

M の中に曲線 c が

$$(4.2)\qquad x^i = x^i(t), \qquad a \leqq t \leqq b,\ i = 1, \cdots, n$$

で与えられたとき，その接ベクトル（速度ベクトル）は，$\sum \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，または，その成分だけ書いて $\left(\dfrac{dx^1}{dt}, \cdots, \dfrac{dx^n}{dt}\right)$ で表わされる．その長さは

$$(4.3)\qquad \left(\sum g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$$

だから，曲線 c の長さは

$$(4.4)\qquad L(c) = \int_a^b \left(\sum g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

で与えられる．(4.3) が常に1になるような助変数 t を s と書く習慣がある．そのような助変数 s を使うと，

$$\sum\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)^{\frac{1}{2}} ds = ds$$

だから，リーマン計量 g を

$$ds^2 = \sum g_{ij}dx^i dx^j$$

と書く伝統がある．

接ベクトル束 TM の標構としては $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ でなく正規直交基をなす $e_1, \cdots, e_n$ を使う方が便利なことが多い．そのとき，定義により

(4.5) $$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

である．$e_1, \cdots, e_n$ に対して双対基となる（局所的に定義された）1次微分形式 $\theta^1, \cdots, \theta^n$ をとれば，リーマン計量 g は

(4.6) $$g = \sum \theta^i \theta^i$$

とも書ける（(1.16) 参照）．

§2では，$\boldsymbol{R}^N$ の部分多様体に自然に入るリーマン計量および接続 (Levi-Civita 接続) について調べたが，ここでは $\boldsymbol{R}^N$ を使わず，一般のリーマン多様体に Levi-Civita 接続を定義する．以下，特にことわらなくても計算は座標近傍内の局所的なものである．次の結果は (3.7)，(3.8) に対応する．

(4.7) **定理**　リーマン計量 $g = \sum \theta^i \theta^i$ に対し，1次微分形式の行列 $\omega = (\omega_j{}^i)$ で次の性質をもつものがただ一つ存在する．

(a) $$\omega_j{}^i = -\omega_i{}^j \qquad \text{(交代性)},$$

(b) $$d\theta^i = -\sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j.$$

証明　求むべき $\omega_j{}^i$ を

$$\omega_j{}^i = \sum c^i{}_{jk} \theta^k, \qquad c^i{}_{jk} = -c^j{}_{ik}$$

と書く．ただし，$c^i{}_{jk}$ は (局所的) 関数である．一方，

$$d\theta^i = \frac{1}{2} \sum a^i{}_{jk} \theta^j \wedge \theta^k, \qquad a^i{}_{jk} = -a^i{}_{kj}$$

と書く．これを

$$-\sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j = \sum c^i{}_{jk} \theta^j \wedge \theta^k = \frac{1}{2} \sum (c^i{}_{jk} - c^i{}_{kj}) \theta^j \wedge \theta^k$$

と比べて

(i) $$a^i{}_{jk} = c^i{}_{jk} - c^i{}_{kj}$$

を得る．問題は，$c^i{}_{jk}$ を $a^i{}_{jk}$ で表わす式である．(i) で i と j を入れかえ，また i と k を入れかえ，次の二式を得る．

(ii) $$a^j{}_{ik} = c^j{}_{ik} - c^j{}_{ki},$$

(iii) $$a^k{}_{ji} = c^k{}_{ji} - c^k{}_{ij}.$$

ここで (i) + (ii) − (iii) を計算し，関係 $c^i{}_{jk} + c^j{}_{ik} = 0$ を使って

$$a^i{}_{jk} + a^j{}_{ik} - a^k{}_{ji} = 2c^k{}_{ij} \tag{4.8}$$

を得る．これで $(\omega_j{}^i)$ の存在と一意性が同時に証明された．

定理によれば，正規直交標構 $e_1, \cdots, e_n$ を与えると，(a)，(b) を満たす $\omega = (\omega_j{}^i)$ が一意に定まった．$e_1, \cdots, e_n$ を同じく正規直交系をなす標構 $e'_1, \cdots e'_n$ に直交変換

$$e'_j = \sum a^i{}_j e_i \tag{4.9}$$

で変えると，$e'_1, \cdots, e'_n$ に対応する双対基 $\theta' = (\theta'^1, \cdots, \theta'^n)$ は $\theta = (\theta^1, \cdots, \theta^n)$ と

$$\theta^i = \sum a^i{}_j \theta'^j \tag{4.10}$$

で結ばれている．行列の記号を使って，

$$\theta = a\theta' \qquad \text{または} \qquad \theta' = a^{-1}\theta \tag{4.11}$$

と書くと便利である．ただし，θ, θ' は縦ベクトルとして書く．そのとき

$$\begin{aligned} d\theta' &= -a^{-1}da \wedge a^{-1}\theta + a^{-1}d\theta = -a^{-1}da \wedge \theta' - a^{-1}\omega \wedge \theta \\ &= -(a^{-1}da + a^{-1}\omega a) \wedge \theta' \end{aligned}$$

ここで

$$\omega' = a^{-1}da + a^{-1}\omega a \tag{4.12}$$

とおけば (θ', ω') は定理 (4.7) の (b) を満たす．一方，$a = (a_j{}^i)$ は直交群 $O(n)$ に値をとるから，ω が交代行列ならば ω' も交代行列になり，ω' は条件 (a) も満たす．したがって，(ω') は定理 (4.7) で存在と一意性を保証されている1次微分形式の行列である．(ω) と (ω') が (4.12) で結ばれているということは，2章の (3.8)，(3.10) によれば，局所的に定義された $\omega = (\omega_j{}^i)$ の族が接ベクトル束 TM に g を保つ接続を定義するということを意味する．この接続をリーマン多様体 (M, g) の **Levi-Civita 接続**(Levi-Civita connection) と呼ぶ．これは，M が $\boldsymbol{R}^N$ の部分多様体の場合に自然に定義された TM の接続の一般化である．

定理 (4.7) の条件 (a) は接続が g を保つということを意味している．TM の任意の接続は (g を保つとか保たないにかかわらず) 一般には，条件 (b) を

満たさない．一般には，

(4.13) $$\Theta^i = d\theta^i + \sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j$$

とおいて $\Theta = (\Theta^i)$ を **捩率形式** (torsion form) と呼ぶ．したがって条件 (b) は捩率が 0 ということである．よって，Levi-Civita 接続は計量 g を保つ捩率 0 の接続であるということができる． また，(4.13) を接続の **第一構造方程式** (first structure equation) と呼ぶ． 条件 (b) を述べる式が Levi-Civita 接続の第一構造方程式である．

2 章の (2.9) によれば Levi-Civita 接続の曲率形式 $\Omega = (\Omega_j{}^i)$ は

(4.14) $$\Omega_j{}^i = d\omega_j{}^i + \sum \omega_k{}^i \wedge \omega_j{}^k \qquad (\text{行列の記号で，} \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega)$$

で定義される．この式を接続の**第二構造方程式** (second structure equation) と呼ぶ．リーマン計量 g により Levi-Civita 接続 ∇ が定まり，接続により曲率が定まる．したがって，曲率は g できまる． 一方，M が $\boldsymbol{R}^N$ の部分多様体の場合，第二基本形式で曲率が表わされたが，実は，その曲率が g にしか依存しないわけである．($\boldsymbol{R}^3$ の中の曲面の場合) これが有名な Gauss の Theorema egregium である．

$\Omega_j{}^i$ は 2 次微分形式であるから，

(4.15) $$\Omega_j{}^i = \frac{1}{2}\sum R^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l, \qquad R^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jlk}$$

と書ける．$R^i{}_{jkl}$ を曲率の **成分** (components) と呼ぶ．正規直交系 $e_1, \cdots, e_n$ に関する成分であるから，

(4.16) $$R_{ijkl} = R^i{}_{jkl}$$

とも書く．(これはテンソル解析の約束を守る読者のための注意であって，そうでない読者には関係ないことである.)

第一構造方程式の外微分は第二構造方程式を使うと

$$\begin{aligned} 0 = d(d\theta) &= -d(\omega \wedge \theta) = -d\omega \wedge \theta + \omega \wedge d\theta \\ &= \omega \wedge \omega \wedge \theta - \Omega \wedge \theta - \omega \wedge \omega \wedge \theta = -\Omega \wedge \theta \end{aligned}$$

となる．すなわち，

(4.17) $\Omega \wedge \theta = 0$ または $\sum \Omega_j{}^i \wedge \theta^j = 0.$

これを成分を使って書けば,

(4.18) $$\sum R^i{}_{jkl}\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l = 0$$

となるが,これは $R^i{}_{jkl} = 0$ を意味しない.まず j, k, l に関して交代化しなければならない. k, l に関してはすでに交代だから, j, k, l のすべての置換の数 $(3! = 6)$ だけ項を書く必要はなく, 3項だけ書けばよい.したがって (4.18) から

(4.19) $$R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk} = 0$$

を得る.(4.17),(4.19) を **Bianchi の第一恒等式** (Bianchi's first identity) と呼ぶ.これはアフィン接続の Bianchi の第一恒等式の特別の場合である.

接続形式 $\omega = (\omega_j{}^i)$ は交代行列だから,曲率形式 $\Omega = (\Omega_j{}^i)$ も交代行列である.したがって,

$$R^i{}_{jkl} = -R^j{}_{ikl}$$

である.(4.16) のように R_{ijkl} と書くと,これは,

(4.20) $$R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

となる.

(4.21) **定理** リーマン多様体の曲率の成分 R_{ijkl} は次のような対称性をもつ.

(a) $$R_{ijkl} = -R_{ijlk},$$

(b) $$R_{ijkl} = -R_{jikl},$$

(c) $$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0,$$

(d) $$R_{ijkl} = R_{klij}.$$

証明 すでに(a),(b),(c)は確かめてある.(d)は(a),(b),(c)を使って添字をぐるぐる動かすだけで証明できるが,次のようにするのが一番早い.(c)の左辺を S_{ijkl} と書き

$$0 = S_{ijkl} - S_{jkli} - S_{klij} + S_{lijk}$$

を(a),(b)を使って簡単にすると，12項のうち8項はたがいに消しあって，

$$0 = 2R_{ijkl} - 2R_{klij}$$

を得る．

曲率は End(TM) に値をもつ2次微分形式だから $TM \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M$ の切断である．その意味ではタイプ(1,3)のテンソル場

(4.22) $$R = \sum R^i{}_{jkl}\, e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^l$$

である．リーマン計量によって TM と T^*M を同一視して $R^i{}_{jkl} = R_{ijkl}$ と書いたが，これはタイプ(0,4)のテンソル場

(4.23) $$\sum R_{ijkl}\, \theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^l$$

を考えることである．このテンソル場を各点 $x \in M$ で4線形写像

(4.24) $$R^* : T_xM \times T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbf{R}$$

を与えるものと考え，$R^*(X_1, X_2, X_3, X_4)$，$X_i \in T_xM$ と書くこともある．そのとき(4.22)との関係は

(4.25) $$R^*(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2,\ X_1)$$

で与えられる．

いま，σ を T_xM の2次元部分空間 X, Y を σ の任意の基とするとき，

(4.26) $$K(\sigma) = \frac{g(R(X, Y)Y,\ X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

を M の σ に対する**断面曲率** (sectional curvature) と呼ぶ．$K(\sigma)$ が基のとり方に依存しないことの証明は読者にまかせる．X, Y が正規直交基ならば，

(4.27) $$K(\sigma) = g(R(X, Y)Y,\ X)$$

である．$X = \sum a^i e_i$，$Y = \sum b^j e_j$ ならば(4.27)は

$$K(\sigma) = \sum R_{ijkl}\, a^i b^j a^k b^l$$

と書ける．

M が2次元の場合には R_{1212} だけ知れば曲率の他の成分は(4.21)からわかる．R_{1212} は曲面の Gauss 曲率である．高次元の場合には，リーマン曲率 R を簡単化した曲率も有用である．

(4.28) $$R_{jk} = \sum_i R^i{}_{jik} = \sum_i R_{ijik}$$

とおいて

(4.29) $$\mathrm{Ric} = \sum R_{jk}\theta^j \otimes \theta^k$$

を **Ricci 曲率** (Ricci curvature)，または **Ricci テンソル** (Ricci tensor) と呼ぶ．(4.21) の (d) により，Ric は対称テンソル，すなわち

(4.30) $$R_{jk} = R_{kj}$$

である．Ricci テンソルの跡

(4.31) $$\sigma = \sum R_{jj}$$

を **スカラー曲率** (scalar curvature) と呼ぶ．

第二構造方程式 (4.14) の外微分を計算すると

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega, \end{aligned}$$

すなわち

(4.32) $$d\Omega + \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega = 0$$

を得る．これは一般のベクトル束の接続に対して証明した Bianchi の恒等式である (2 章の (2.17) 参照)．(4.17) から区別するため，(4.32) を **Bianchi の第二恒等式** (Bianchi's second identity) と呼ぶ．これを曲率の成分を使って書いてみる．まず，準備として

(4.33) $$\begin{aligned} dR^i{}_{jkl} + \sum \omega_h{}^i R^h{}_{jkl} - \sum R^i{}_{hkl}\,\omega_j{}^k - \sum R^i{}_{jhl}\,\omega_k{}^h - \sum R^i{}_{jkh}\,\omega_l{}^h \\ = \sum R^i{}_{jkl,h}\theta^h \end{aligned}$$

とおいて $R^i{}_{jkl,h}$ (または $\nabla_h R^i{}_{jkl}$ とも書く) を定義する．(4.32) を

$$d(\sum R^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l) + \sum \omega_h{}^i \wedge R^h{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l - R^i{}_{hkl}\theta^k \wedge \theta^l \wedge \omega_j{}^h = 0$$

と書いて，第一構造方程式を使えば

(4.34) $$\sum R^i{}_{jkl,h}\theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^h = 0$$

を得る．(4.19) の場合と同様，(4.34) を交代化して，

(4.35) $$R^i{}_{jkl,h} + R^i{}_{jlh,k} + R^i{}_{jhk,l} = 0$$

を得る．これが Bianchi の第二恒等式の通常の形である．$R^i{}_{jkl,h}(=\nabla_h R^i{}_{jkl})$ は曲率テンソル R の共変微分の成分で，(4.35) は 2 章の問題 10.1 の式 (2) の特別な場合である．

この節では，局所標構 $e_1, \cdots, e_n$ を使って，M 上で計算をした．主ファイバー束 $O(M)$ で計算することもできる．その二方法の対応については一般のベクトル束とそれに同伴する主ファイバー束の場合を 2 章 §5 と §6 で説明した．またアフィン接続の場合は前章 §9 で説明したが，リーマン多様体 M の場合には，(1.4) で定義した正規直交標構束 $O(M)$ を線形標構束 $L(M)$ の部分束と考え，前章 (9.24) で定義した $\boldsymbol{R}^n$ 値の 1 次微分形式 $\theta=(\theta^1, \cdots, \theta^n)$ を $O(M)$ に制限したものを使う．それを同じ記号 $\theta=(\theta^1, \cdots, \theta^n)$ で表わすことにする．Levi-Civita 接続を与える $O(M)$ 上の接続形式 $\omega=(\omega_j{}^i)$ は $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ に値をとるから歪対称である．この接続の構造方程式は前章の (9.29), (9.30), (9.34) のごとく，

$$(4.36) \qquad d\theta^i = -\sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j,$$

$$(4.37) \qquad d\omega_j{}^i = -\sum \omega_k{}^i \wedge \omega_j{}^k + \Omega_j{}^i, \qquad \Omega_j{}^i = \frac{1}{2}\sum R^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l$$

で与えられる．また対応

$$(4.38) \qquad X \in T_u(O(M)) \longrightarrow (\theta(X), \omega(X)) \in \boldsymbol{R}^n \oplus \mathfrak{o}(n)$$

は前章 (9.28) と同様に同型写像で，$O(M)$ には (θ, ω) により絶対平行性が定義される．

問題 4.1 リーマン多様体 (M, g) の Levi-Civita 接続 ∇ は

(a) $\nabla g = 0$, (b) 捩率 0,

という性質で定義されたが，局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$ に関する Christoffel の記号 $\Gamma^i{}_{jk}$ が次の式で与えられることを証明せよ．

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\sum g^{il}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right),$$

ただし，(g^{jl}) は (g_{jl}) の逆行列，すなわち，$\sum g^{jl} g_{lk} = \delta_k{}^j$ とする．

§5. 共形変換

M を n 次元多様体，g を M 上のリーマン計量とする．φ を M 上いたるところで正の関数とするとき，新しいリーマン計量 $g'=\varphi^2 g$ は元の計量に**共形** (conformal) であるという．そのとき，g' の定義する接続，曲率が g のそれにどう関係しているかを調べる．

$e_1,\cdots,e_n$ を g に関する M の局所正規直交標構，$\theta^1,\cdots,\theta^n$ はその双対基をなす 1 次微分形式とする．したがって

$$(5.1)\qquad g(e_i,e_j)=\delta_{ij}, \qquad \theta^i(e_j)=\delta_j{}^i, \qquad g=\sum\theta^i\theta^i$$

である．

$$(5.2)\qquad e'_i=\frac{1}{\varphi}e_i, \qquad \theta'^i=\varphi\theta^i$$

とおけば，$e'_1,\cdots,e'_n$ は g' に関して正規直交であり，$\theta'^1,\cdots,\theta'^n$ はその双対基になる．すなわち，

$$(5.3)\qquad g'(e'_i,e'_j)=\delta_{ij}, \qquad \theta'^i(e'_j)=\delta_j{}^i, \qquad g'=\sum\theta'^i\theta'^i.$$

$\omega=(\omega_j{}^i)$ が (M,g) の Levi-Civita 接続 ∇ の接続形式ならば，(4.7) により

$$(5.4)\qquad \omega_j{}^i=-\omega_i{}^j, \qquad d\theta^i=-\sum\omega_j{}^i\wedge\theta^j$$

が得られる．

次に (M,g') の Levi-Civita 接続 ∇' を考える．∇' の $e_1,\cdots,e_n$ に関する接続形式を $\tilde{\omega}=(\tilde{\omega}_j{}^i)$，$e'_1,\cdots,e'_n$ に関する接続形式を $\omega'=(\omega'_j{}^i)$ とする．2 章 (1.13) によれば ((5.2) を使って)

$$(5.5)\qquad \tilde{\omega}_j{}^i=\omega'_j{}^i+d\log\varphi\cdot\delta_j{}^i$$

である．ω' は (5.4) と同様の Levi-Civita 接続の条件

$$(5.6)\qquad \omega'_j{}^i=-\omega'_i{}^j, \qquad d\theta'^i=-\sum\omega'_j{}^i\wedge\theta'^j$$

を満たすから，(5.5) を (5.6) に代入して

$$(5.7)\qquad \tilde{\omega}_j{}^i+\tilde{\omega}_i{}^j=2d\log\varphi\cdot\delta_j{}^i,$$

$$(5.8)\qquad d\log\varphi\wedge\theta^i+d\theta^i=-\sum(\tilde{\omega}^i{}_j-d\log\varphi\cdot\delta_j{}^i)\wedge\theta^j$$

を得る．$\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_j{}^i)$ を求めるために

$$\tilde{\omega}_j = \omega_j{}^i + \sum a^i{}_{ik}\theta^k \tag{5.9}$$

とおき $a^i{}_{jk}$ を求める．また，f と f_k を

$$f = \log\varphi\,, \qquad df = d\log\varphi = f_k\theta^k \tag{5.10}$$

によって定義する．(5.7), (5.9), (5.10) から

$$a^i{}_{jk} + a^j{}_{ik} = 2f_k\delta_j{}^i \tag{5.11}$$

を得る．同様に (5.8), (5.9), (5.10), (5.4) から

$$a^i{}_{jk} = a^i{}_{kj} \tag{5.12}$$

を得る．(5.11) で j と k を入れかえた式を (5.11)′，i と k を入れかえた式を (5.11)″ とし，(5.11) + (5.11)′ − (5.11)″ を (5.12) を使って簡単化して，

$$a^i{}_{jk} = f_k\delta_j{}^i + f_j\delta_k{}^i - f_i\delta_j{}^k \tag{5.13}$$

を得る．(5.13) を (5.9) に代入して，

$$\tilde{\omega}_j{}^i = \omega_j{}^i + \delta_j{}^i df + f_j\theta^i - f_i\theta^j \tag{5.14}$$

を得る．(5.14) を使って曲率形式 $\tilde{\Omega}_j{}^i = d\tilde{\omega}_j{}^i + \sum \tilde{\omega}_k{}^i \wedge \tilde{\omega}_j{}^k$ を計算して次の式を得る．

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_j{}^i = \Omega_j{}^i &+ (df_j - \sum f_k\omega_j{}^k)\wedge\theta^i - (df_i - \sum f_k\omega_i{}^k)\wedge\theta^j \\ &+ \sum f_k f_j\theta^i\wedge\theta^k + \sum f_i f_k\theta^k\wedge\theta^j - (\sum f_h f_h)\theta^i\wedge\theta^j\,.\end{aligned} \tag{5.15}$$

前節で説明したように，$f_{j,k}$ を次の式で定義する．

$$df_j - f_k\omega_j{}^k = \sum f_{j,k}\theta^k\,. \tag{5.16}$$

これを使って (5.15) を次のように書き直す．

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_j{}^i = \Omega_j{}^i + ((f_{j,k} - f_j f_k)\delta_l{}^i &- (f_{i,k} - f_i f_k)\delta_l{}^j \\ &- (\sum f_h f_h)\delta_k{}^i\delta_l{}^j)\theta^k\wedge\theta^l\,.\end{aligned} \tag{5.17}$$

上式の右辺の $\theta^k\wedge\theta^l$ の係数を交代化して曲率 $\tilde{\Omega}, \Omega$ の成分を比べると

$$\begin{aligned}\tilde{R}^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} &+ (f_{j,k} - f_j f_k)\delta_l{}^i - (f_{j,l} - f_j f_l)\delta_k{}^i \\ &- (f_{i,k} - f_i f_k)\delta_l{}^j + (f_{i,l} - f_i f_l)\delta_k{}^j \\ &- (\sum f_h f_h)(\delta_k{}^i\delta_l{}^j - \delta_l{}^i\delta_k{}^j)\,.\end{aligned} \tag{5.18}$$

ここで，左辺の $\tilde{R}^i{}_{jkl}$ は (M, g') の曲率テンソルの $e_1, \cdots, e_n$ に関する成分であることに注意する．(5.18) で $i=k$ について和をとれば，Ricci テンソルが得られる．すなわち，

$$(5.19)\qquad \tilde{R}_{jl} = R_{jl} - (n-2)(f_{j,l} - f_j f_l) - (n-2)(\sum f_i f_i)\delta_{jl} - (\sum f_{i,i})\delta_{jl}$$

である．

g' の Ricci テンソル $\sum \tilde{R}_{jl}\theta^j \otimes \theta^l$ の $e'_1, \cdots, e'_n$ に関する成分 R'_{jl} は

$$R'_{jl} = \frac{1}{\varphi^2}\tilde{R}_{jl}, \qquad (\sum R'_{jl}\theta'^j \otimes \theta'^l = \sum \tilde{R}_{jl}\theta^j \otimes \theta^l),$$

であるから，g' のスカラー曲率 σ' は

$$\sigma' = \sum R'_{jj} = \frac{1}{\varphi^2}\sum \tilde{R}_{jj}$$

で与えられる．(5.19) を使って g のスカラー曲率 σ との関係を求めると，

$$(5.20)\qquad \sigma' = \frac{1}{\varphi^2}(\sigma - 2(n-1)\sum f_{i,i} - (n-1)(n-2)\sum f_i f_i).$$

次に (5.19) と (5.20) から $\sum f_i$ を消去して

$$(5.21)\qquad f_{j,l} - f_j f_l = -\frac{1}{n-2}(\tilde{R}_{jl} - R_{jl}) + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(\varphi^2\sigma' - \sigma)\delta_{jl} - \frac{1}{2}(\sum f_i f_i)\delta_{jl}.$$

これを (5.18) の右辺の第 2 ～ 5 項に代入して，

$$(5.22)\qquad \tilde{R}^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} - \frac{1}{n-2}(\tilde{R}_{jk} - R_{jk})\delta_l{}^i + \frac{1}{n-2}(\tilde{R}_{jl} - R_{jl})\delta_k{}^i + \frac{1}{n-2}(\tilde{R}_{ik} - R_{ik})\delta_l{}^j - \frac{1}{n-2}(\tilde{R}_{il} - R_{il})\delta_k{}^j + \frac{1}{(n-1)(n-2)}(\varphi^2\sigma' - \sigma)(\delta_{jk}\delta_l{}^i - \delta_{jl}\delta_k{}^i).$$

ここで

$$(5.23)\quad W^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} + \frac{1}{n-2}(R_{jk}\delta_l{}^i - R_{jl}\delta_k{}^i - R_{ik}\delta_l{}^j + R_{il}\delta_k{}^j) + \frac{\sigma}{(n-1)(n-2)}(\delta_{jl}\delta_k{}^i - \delta_{jk}\delta_l{}^i)$$

と定義する．同様に $W'^i{}_{jkl}$ を $R'^i{}_{jkl}$, R'_{jl}, σ' を使って定義すると，(5.22) は

$$(5.24)\quad W^i{}_{jkl} = \varphi^2 W'^i{}_{jkl}$$

と書ける．これは

$$(5.25)\quad \sum W^i{}_{jkl}\, e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^l = \sum W'^i{}_{jkl}\, e'_i \otimes \theta'^j \otimes \theta'^k \otimes \theta'^l$$

と同じである．(5.25) によって定義されるテンソル場 W を Weyl の **共形曲率テンソル** (conformal curvature tensor) と呼ぶ．リーマン計量の共変変換 $g \to g' = \varphi^2 g$ で W は不変であることを (5.25) は示している．以上の計算で $n-2$ で割り算をする必要があるのでもちろん $n \geqq 3$ を仮定していることに注意する．

リーマン計量 g が局所的にユークリッド空間の通常の計量に共形なとき，g は **共形的に平坦** (conformally flat) であるという．詳しくいえば，各点 $x \in M$ に座標近傍 U, 局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$, および U で定義された関数 $\varphi > 0$ が存在して，

$$(5.26)\quad \varphi^2 g = \sum (dx^i)^2$$

と書けることである．そのとき，$\varphi^2 g$ の曲率は 0 だから共形曲率テンソル W も 0 である．したがって

(5.27) **定理** リーマン多様体 (M, g) が共形的に平坦なら，その共形曲率テンソル W は 0 である．

M の次元 n が $n > 3$ ならば逆も成り立つが，ここでは証明しない．$n = 3$ の場合は常に $W = 0$ である．これは，例えば次の事実からわかる．

$n = 3$ の場合，Ricci テンソルの定義を成分を使って書き，曲率の成分の間の関係式 (4.21) を使って

$$
(5.28)\qquad
\begin{aligned}
R_{1212} &= \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} - R_{33}) ,\\
R_{1213} &= R_{23} ,\\
R_{1223} &= - R_{13} ,\\
R_{1313} &= \frac{1}{2}(R_{11} - R_{22} + R_{33}) ,\\
R_{1323} &= R_{12} ,\\
R_{2323} &= \frac{1}{2}(- R_{11} + R_{22} + R_{33})
\end{aligned}
$$

を得る．曲率の他の成分は (4.21) により上の成分で定まる．すなわち，3次元リーマン多様体の曲率はRicci テンソルで表わされるのである．この式から $W=0$ は確かめられる．

3次元の場合に，(M, g) が共形的に平坦になる必要十分条件は

$$
(5.29)\qquad R_{ij,k} - R_{ik,j} + \frac{1}{2(n-1)}(\delta_{ik}\sigma_j - \delta_{ij}\sigma_k) = 0
$$

であることが知られている（ここで $d\sigma = \sum \sigma_i \theta^i$）．一般の $n > 3$ に対しては，$W=0$ ならば (5.29) は自動的に成り立つことも知られている．以上のことについて，古典的テンソル解析の方法で［E］に詳しい説明がある．また[野水］には，この節の内容が基 $e_1, \cdots, e_n$ を使わずに説明してある．主ファイバー束を使った共形接続の現代的説明はK. Ogiue：Theory of conformal connections, Kōdai Math. Sem. Rep. 19(1967), 193—224 に詳しい．また［K］の4章も多少参考になるであろう．

共形的平坦なリーマン多様体として大切な定曲率空間については次節で述べる．N. H. Kuiper：On conformally flat spaces in the large, Ann. of Math. 50(1949), 916—924 によれば，コンパクト単連結なリーマン多様体が共形的に平坦ならば，それは通常の計量をもった球面に共形的である．

§6. 定曲率の空間

まずユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の中の半径 R の球面

$$S_R{}^n = \{(y^1, \cdots, y^{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\, \sum (y^\alpha)^2 = R^2\}$$

の曲率を §3 の方法で計算する．

$$\boldsymbol{y} : S_R{}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^{n+1}$$

を位置ベクトルとして考える．$e_1, \cdots, e_n$ は接ベクトル束の局所正規直交標構，e_{n+1} は単位法ベクトル場（外向き）とする．$\boldsymbol{y}$ の長さは R だから，

(6.1) $$\boldsymbol{y} = R e_{n+1}\,.$$

一方，(3.1) により，また他方 (3.4) により，

(6.2) $$d\boldsymbol{y} = \sum \theta^i e_i\,, \qquad d\boldsymbol{y} = R\,de_{n+1} = R \sum \omega_{n+1}{}^i e_i\,.$$

二式を比べて

(6.3) $$\omega_i{}^{n+1} = -\,\omega_{n+1}{}^i = -\,\frac{1}{R}\theta^i\,.$$

したがって第二基本形式の係数は (3.10) によれば

(6.4) $$h^{n+1}{}_{ij} = -\,\frac{1}{R}\delta_{ij}\,.$$

Gauss の式により

(6.5) $$R_{ijkl} = \frac{1}{R^2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})\,,$$

これから断面曲率 K は定数で

(6.6) $$K = \frac{1}{R^2}\,.$$

Ricci テンソルおよびスカラー曲率 σ はそれぞれ

(6.7) $$R_{jl} = \frac{n-1}{R^2}\delta_{jl} = (n-1)K\delta_{jl}\,,$$
$$\sigma = \frac{n(n-1)}{R^2} = n(n-1)K$$

となる．これから，共形曲率 W が 0 になることもわかるが直接に，$S_R{}^n$ が共形的に平坦であることを示そう．

そのために立体射影を使う．$S_R{}^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ の北極 N は座標 $(0, \cdots, 0, R)$ をもつ．超平面上の点 $(x^1, \cdots, x^n, 0)$ と N を結ぶ直線は $(tx^1, \cdots, tx^n, R(1-t))$ で与えられる．この直線が球面と交わるのは $t=0$ 以外には

$$t = \frac{2R^2}{R^2+(x,x)} \qquad (\text{ここで } (x,x) = \sum (x^i)^2)$$

のときである．交点の座標 $(y^1, \cdots, y^n, y^{n+1})$ は

$$(6.8) \qquad y^i = \frac{2R^2 x^i}{R^2+(x,x)}, \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$y^{n+1} = R\left(1 - \frac{2R^2}{R^2+(x,x)}\right).$$

(6.8) から簡単な計算で

$$(6.9) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n+1} dy^\alpha dy^\alpha = \frac{4R^4}{(R^2+(x,x))^2} \sum_{i=1}^{n} dx^i dx^i$$

を得る．左辺は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ から引きおこされた $S_R{}^n$ 上のリーマン計量を表わし，右辺は立体射影で $S_R{}^n - \{N\}$ を $\boldsymbol{R}^n$ に射影してできる $\boldsymbol{R}^n$ 上のリーマン計量を表わす．(6.9) により，この計量は通常の計量 $\sum dx^i dx^i$ に共形であるから，共形的に平坦である．

$\boldsymbol{R}^n$ 上で $\sum dx^i dx^i$ に関する正規直交標構 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ を使い前節の方法で計量 (6.9) の曲率を計算してみる．まず，

$$\varphi = \frac{2R^2}{R^2+(x,x)}, \qquad f = \log \frac{2R^2}{R^2+(x,x)},$$

$$(6.10) \qquad df = -\frac{2}{R^2+(x,x)} \sum x^i dx^i,$$

$$\tilde{\omega}_j{}^i = \delta_j{}^i df - \frac{2}{R^2+(x,x)} (x^j dx^i - x^i dx^j).$$

したがって曲率形式 $\tilde{\Omega}_j{}^i$ は簡単な計算で

$$(6.11) \quad \tilde{\Omega}_j{}^i = d\tilde{\omega}_j{}^i + \sum \tilde{\omega}_k{}^i \wedge \tilde{\omega}_j{}^k = \frac{4R^2}{(R^2+(x,x))^2} dx^i \wedge dx^j.$$

その成分 $\tilde{R}^i{}_{jkl}$ は $\tilde{\Omega}_j{}^i = \dfrac{1}{2} \sum \tilde{R}^i{}_{jkl} dx^k \wedge dx^l$ と (6.11) を比べて

$$\tilde{R}^i{}_{jkl} = \frac{4R^2}{(R^2+(x,x))^2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{6.12}$$

となる．しかし計量 (6.9) に関する正規直交標構 $\dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial}{\partial x^n}$ を使えば計量 (6.9) の曲率の成分 $R^i{}_{jkl} = \dfrac{1}{\varphi^2}\tilde{R}^i{}_{jkl}$ は

$$R_{ijkl} = R^i{}_{jkl} = \frac{1}{R^2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{6.13}$$

となり，当然のことではあるが，これは (6.5) と一致する．

次に $\boldsymbol{R}^n$ の半径 R の球の内部

$$B^n{}_R = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \boldsymbol{R}^n \,;\, (x,x) = \sum (x^i)^2 < R^2\} \tag{6.14}$$

を考える．この領域上のリーマン計量

$$g = \frac{4R^4}{(R^2-(x,x))^2}\sum dx^i dx^i \tag{6.15}$$

は，明らかに共形的に平坦である．計量 (6.9) と比べ，上と同様の計算で正規直交標構 $\dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial}{\partial x^1}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial}{\partial x^n}$ $\left(ここで，\varphi = \dfrac{2R^2}{R^2-(x,x)}\right)$ に関する曲率の成分は

$$R_{ijkl} = -\frac{1}{R^2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{6.16}$$

となることがわかる．切断曲率 K は定数 $K = -\dfrac{1}{R^2}$ である．

正の定曲率空間を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内の球面 $S_R{}^n$ として表わしたが，負の定曲率空間の場合にも似た表わし方がある．しかしそれには，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ に通常のリーマン計量でなく，いわゆる，ローレンツ計量 $dy^1dy^1 + \cdots + dy^ndy^n - dy^{n+1}dy^{n+1}$ を考える必要がある．それを超曲面

$$(y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2 - (y^{n+1})^2 = -R^2 \tag{6.17}$$

に制限すると切断曲率 $K = -\dfrac{1}{R^2}$ のリーマン計量になる．この超曲面は二つの連結成分 ($y^{n+1} > 0$ および $y^{n+1} < 0$) に分れる．立体射影で各連結成分と $B_R{}^n$ の間にリーマン計量を保つ対応がつけられることは演習問題とする．§ 3 の方法を一般化しても曲率の計算はできる．詳しくは [野水] を参照のこと．

定曲率 K のリーマン空間で単連結，完備（Cauch 列が必ず収束するの意）なものは本質的に一つしかない．すなわち，（i）$K>0$ ならば半径 $R=\dfrac{1}{\sqrt{K}}$ の球面に等長，（ii）$K=0$ ならばユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ に等長，（iii）$K<0$ ならば (6.14) と (6.15) で定義した $B^n{}_{\sqrt{-K}}$ に等長である．$B^n{}_{\sqrt{-K}}$（またそれに等長なもの）を**双曲空間** (hyperbolic space) と呼ぶ．より詳しくは [K–N]，vol. 1 を参照されたい．

問題 6.1　$V=\boldsymbol{R}^n$ を自然な内積をもった n 次元ベクトル空間とし，4 重線形写像

$$R: V\times V\times V\times V \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

でリーマン曲率テンソルと同様な代数的恒等式

$$R_{ijkl}=-R_{jikl}=-R_{ijlk},\qquad R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0$$

を満たすもの全体を $\mathscr{R}$ とする．Ricci の縮約

$$c: \mathscr{R} \longrightarrow S^2V^* \quad (= \text{対称双線形写像 } V\times V\to \boldsymbol{R} \text{ の全体}),$$

$$c: (R_{ijkl}) \longmapsto \Big(R_{jl}=\sum_i R_{ijil}\Big)$$

の核 $c^{-1}(0)$ を $\mathscr{R}_W$ と書く．$n>2$ として，写像 r

$$r: S^2V^* \longrightarrow \mathscr{R},$$

$$r: (S_{ij}) \longmapsto \left(R_{ijkl}=\frac{1}{n-2}(S_{jk}\delta_{il}-S_{jl}\delta_{ik}-S_{ik}\delta_{jl}+S_{il}\delta_{jk})\right)$$

と定義し，

$$S_0{}^2V^*=\{(S_{jl})\in S^2V^*\,;\,\sum S_{ii}=0\}$$

とおく．また，$(\delta_{jl})\in S^2V^*$ を δ と書くことにすると，$\mathscr{R}$ は

（i）
$$\mathscr{R}=\mathscr{R}_W\oplus r(S_0{}^2V^*)\oplus r(\boldsymbol{R}\delta)$$

と直和分解されることを確かめよ．

（ii）　上の分解と (5.23) との関係を説明せよ．

（iii）　ベクトル空間 $\mathscr{R}, \mathscr{R}_W$，$r(S_0{}^2V^*)$，$r(\boldsymbol{R}\delta)$ の次元を求めよ．

注意　（i）における分解は $n\geqq 4$ の場 $O(n)$ について，既約な分解になっている．

問題 6.2　n 次元 $(n\geqq 3)$ リーマン空間が共形的に平坦で，しかも Einstein の条件 $\left(R_{ij}=\dfrac{\sigma}{n}\delta_{ij}\right)$ を満たすならば定曲率空間であることを証明せよ．

§7. 調和積分

この節ではMはコンパクトで向きのついたn次元リーマン多様体とする．特にことわらない限り，与えられた向きと適合する局所座標系$x^1, \cdots, x^n$だけ使う．同様に，TMの局所標構$e_1, \cdots, e_n$も$\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$と同じ向き（すなわち，$e_i = \sum a_i{}^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$，$\det(a_i{}^j) > 0$）のものだけ使う．$e_1, \cdots, e_n$を正規直交する標構，$\theta^1, \cdots, \theta^n$をその双対基としたとき

(7.1) $$\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

で，これをMの**体積要素** (volume element) と呼ぶ．

しばらくMの点xを固定して双対接空間$T_x{}^*M$上の線形代数の話をするので，簡単のため$V = T_x{}^*M$とおき，リーマン計量gにより定義される$\wedge^p V$の内積もgと書くことにする．定義により，

(7.2) $$\{\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p} \,;\, i_1 < \cdots < i_p\}$$

が$\wedge^p V$の正規直交基底である．$\wedge^p V$も$\wedge^{n-p} V$も共に$\dbinom{n}{p}$次元であるが，Hodge の$*$**作用素**（$*$operator）と呼ばれる同型線形写像

(7.3) $$* : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^{n-p} V$$

が定義される．すなわち条件

(7.4) $$g(*\varphi, \psi)\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n = \varphi \wedge \psi, \qquad \varphi \in \wedge^p V,\ \psi \in \wedge^{n-p} V$$

で$*$は一意的に定まる．実際，φを固定して線形写像

$$L_\varphi : \wedge^{n-p} V \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

を

(7.5) $$\varphi \wedge \psi = L_\varphi(\psi)\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n, \qquad \psi \in \wedge^{n-p} V$$

によって定義すると，gが$\wedge^{n-p} V$での内積であることから$\wedge^{n-p} V$にただ一つ

(7.6) $$g(*\varphi, \psi) = L_\varphi \psi$$

となる元$*\varphi$が存在する．（要するにgにより，$\wedge^{n-p} V$とその双対空間の間に同型対応が定義されるということである．）

さて，この$*$を具体的に表わそう．(7.5) と (7.6) から

$$*(\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_p})=\varepsilon\,\theta^{i_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_n}, \tag{7.7}$$

ここでεは置換 $(1,2,\cdots,n)\to(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ の符号である．(特に，$i_{p+1},\cdots,i_n$ は$i_1,\cdots,i_p$ の残りの添字である．) (7.6) または (7.7) から，容易に次の式が確かめられる．

$$**\varphi=(-1)^{p(n-p)}\varphi, \qquad \varphi\in\wedge^p V, \tag{7.8}$$

$$*1=\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n, \qquad *(\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n)=1, \tag{7.9}$$

$$g(*\varphi,\psi)=(-1)^{p(n-p)}g(\varphi,*\psi), \qquad \varphi\in\wedge^p V,\ \psi\in\wedge^{n-p}V, \tag{7.10}$$

$$g(*\varphi,*\psi)=g(\varphi,\psi), \qquad \varphi,\psi\in\wedge^p V, \tag{7.11}$$

$$\varphi\wedge*\psi=g(\varphi,\psi)\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n, \qquad \varphi,\psi\in\wedge^p V. \tag{7.12}$$

これで$*$作用素の 1 点 $x\in M$ における性質はすべて述べたことになる．次に外微分dとの関連を調べる．外微分

$$d: A^p(M)\longrightarrow A^{p+1}(M)$$

の双対の作用素

$$\delta: A^p(M)\longrightarrow A^{p-1}(M)$$

を

$$\delta\varphi=(-1)^p*^{-1}d*\varphi, \qquad \varphi\in A^p(M) \tag{7.13}$$

と定義する．このような定義をする理由を知るためにMをコンパクトとして

$$(\alpha,\beta)=\int_M\alpha\wedge*\beta=\int_M g(\alpha,\beta)*1, \qquad \alpha,\beta\in A^p(M) \tag{7.14}$$

と定義する ((7.12) と (7.9) 参照)．(,) は $A^p(M)$ に内積を定義する．いま $\alpha=d\varphi$, $\beta=\psi$ に上の式を適用すると，

$$(d\varphi,\psi)=\int_M d\varphi\wedge*\psi=\int_M d(\varphi\wedge*\psi)+(-1)^p\int_M\varphi\wedge d*\psi.$$

Stokes の定理により，右辺の

$$\int_M d(\varphi\wedge*\psi)=0.$$

一方，

$$(-1)^p\int_M \varphi \wedge d*\psi = (-1)^p\int_M \varphi \wedge * *^{-1} d*\psi$$
$$= (\varphi, (-1)^p *^{-1} d*\psi) = (\varphi, \delta\psi)$$

となる．したがって，

(7.15) $$(d\varphi, \psi) = (\varphi, \delta\psi)$$

すなわち，δ が d の **随伴作用素** (adjoint operator) になるように定義 (7.13) を与えたのである．$\delta\circ\delta = \pm *^{-1}\circ d\circ *\circ *^{-1}\circ d\circ * = \pm *^{-1}\circ d\circ d\circ *$ であるから，

(7.16) $$\delta\circ\delta = 0$$

を得る．

1次微分形式 $\alpha = \sum a_i\theta^i$ に対し $\delta\alpha$ を計算してみる．(7.7) から

(7.17) $$*\alpha = \sum (-1)^{i-1} a_i \theta^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

($\hat{\theta}^i$ は θ^i を抜かすの意)．

次に Levi-Civita 接続形式 $(\omega_j{}^i)$ と，その性質

$$d\theta^i = -\sum \omega_j{}^i \wedge \theta^j, \qquad \omega_j{}^i = -\omega_i{}^j$$

を使って

(7.18) $$\begin{aligned} d*\alpha &= \sum (-1)^{i-1} da_i \wedge \theta^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \cdots \wedge \theta^n \\ &\quad + \sum_{i,k} a_i \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{k-1} \wedge \omega_i{}^k \wedge \theta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n \\ &= \sum_k \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{k-1} \wedge (da_k - \sum_i a_i \omega_k{}^i) \wedge \theta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n \end{aligned}$$

を得る．したがって

(7.19) $$da_k - \sum a_i \omega_k{}^i = \sum \nabla_j a_k \theta^j$$

とおけば

(7.20) $$d*\alpha = \sum \nabla_k a_k \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n,$$

(7.21) $$\delta\alpha = -*^{-1} d*\alpha = -\sum \nabla_k a_k$$

となる．(いま，α に対応する接ベクトル場 $X = \sum a_i e_i$ を考えれば，

(7.22) $$\delta\alpha = -\operatorname{div} X$$

となることに注意しておく．)

同様の計算で，一般に

(7.23)　$$\alpha = \frac{1}{p!}\sum a_{i_1\cdots i_p}\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_p}, \qquad (a_{i_1\cdots i_p}\text{ は交代})$$

に対しては，

(7.24)
$$d\alpha = \frac{1}{(p+1)!}\sum\left(\nabla_j a_{i_1\cdots i_p} - \sum_{k=1}^{p}\nabla_{i_k}a_{i_1\cdots i_{k-1}ji_{k+1}\cdots i_p}\right)\theta^j\wedge\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_p},$$

(7.25)　$$\delta\alpha = -\frac{1}{(p-1)!}\sum\nabla_j a_{ji_2\cdots i_p}\theta^{i_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_p}$$

が成り立つ．ただし，ここで $\nabla_j a_{i_1\cdots i_p}$ は，

(7.26)　$$da_{i_1\cdots i_p} - \sum a_{ki_2\cdots i_p}\omega_{i_1}{}^k - \cdots - \sum a_{i_1\cdots i_{p-1}k}\omega_{i_p}{}^k = \sum\nabla_j a_{i_1\cdots i_p}\theta^j$$

で与えられる．証明は定義にのっとり計算すればよいが，特別な正規直交基 $e_1, \cdots, e_n$ を使って，少々計算を簡単にすることができる．M の点 x を固定すれば，その点では $\omega_j{}^i = 0$ となるように $e_1, \cdots, e_n$ を x の近傍でえらぶことができる．（$e_1, \cdots, e_n$ を正規直交標構束の切断として，x で水平になるようにえらべばよい．）そうすると $d\theta^i$ も x で 0 になるから計算は少し楽になる．

次に **ラプラシアン** (Laplacian)

$$\Delta : A^p(M) \longrightarrow A^p(M)$$

を

(7.27)　$$\Delta = \delta\circ d + d\circ\delta$$

と定義する．p 次微分形式 φ が

$$\Delta\varphi = 0$$

となるとき **調和形式** (harmonic form) と呼ばれる．M がコンパクトなら

$$\begin{aligned}(\Delta\varphi, \varphi) &= (\delta d\varphi + d\delta\varphi,\ \varphi) = (\delta d\varphi, \varphi) + (d\delta\varphi, \varphi)\\ &= (d\varphi, d\varphi) + (\delta\varphi, \delta\varphi)\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$(7.28)\qquad \Delta\varphi = 0 \iff d\varphi = 0,\ \delta\varphi = 0$$

という同値関係が成立する（$\Leftarrow$ はコンパクトでなくても成立する）.

ラプラシアン $\Delta\varphi$ を φ の次数の低いときに計算してみる. 関数 f に対しては,

$$df = \sum f_i \theta^i$$

とおく. $\delta f = 0$ だから, (7.21) を使って

$$(7.29)\qquad \Delta f = \delta d f = \delta\left(\sum f_i \theta^i\right) = -\sum \nabla_i f_i$$

を得る. 次に 1 次微分形式 $\alpha = \sum a_i \theta^i$ の場合は,

$$(7.30)\qquad \begin{aligned} d\alpha &= \frac{1}{2}\sum(\nabla_i a_j - \nabla_j a_i)\theta^i \wedge \theta^j, \\ \delta d\alpha &= -\sum(\nabla_i \nabla_i a_j - \nabla_i \nabla_j a_i)\theta^j, \\ \delta\alpha &= -\sum \nabla_i a_i\,, \\ d\delta\alpha &= -\sum \nabla_j \nabla_i a_i \theta^j \end{aligned}$$

であるから, Ricci の恒等式 (2 章 (10.14) 参照) を使って

$$(7.31)\qquad \begin{aligned} \Delta\alpha &= -\sum(\nabla_i \nabla_i a_j - (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) a_i)\theta^j \\ &= -\sum(\nabla_i \nabla_i a_j + R_{ij} a_i)\theta^j\,. \end{aligned}$$

同様な計算で p 次微分形式 $\alpha = \dfrac{1}{p\,!}\sum a_{i_1\cdots i_p}\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}$ に対しては,

$$(7.32)\qquad \Delta\alpha = \frac{1}{p\,!}\sum a^{\Delta}{}_{i_1\cdots i_p}\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p},$$

ただし, ここで

$$(7.33)\qquad \begin{aligned} a^{\Delta}{}_{i_1\cdots i_p} = &-\sum_j \nabla_j \nabla_j a_{i_1\cdots i_p} - \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{p}\sum_j a_{i_1\cdots i_{s-1} j i_{s+1}\cdots i_p} R_{j i_s} \\ &+ \frac{1}{p}\sum_{1\leqq s<t\leqq p}\sum_{j,k} a_{i_1\cdots i_{s-1} j i_{s+1}\cdots i_{t-1} k i_{t+1}\cdots i_p} R_{jk i_s i_t}\,. \end{aligned}$$

この式から, ラプラシアン Δ は強楕円型作用素であることがわかる.

M 上の p 次調和微分形式の全体を $\boldsymbol{H}^p = \boldsymbol{H}^p(M)$ と書く.

$$\boldsymbol{H}^p = \boldsymbol{H}^p(M) = \{\varphi \in A^p(M)\ ;\ \Delta\varphi = 0\}\,.$$

M 上の p 次微分形式の全体 $A^p(M)$ を簡単のため A^p と書く. そのとき, 向きのついたコンパクト・リーマン多様体 M に対し Hodge の分解定理が成り

立つ.

(7.34) $$A^p = \boldsymbol{H}^p \oplus dA^{p-1} \oplus \delta A^{p+1}, \qquad \dim \boldsymbol{H}^p < \infty.$$

ここで $\oplus$ は A^p の内積 (,) に関し，$\boldsymbol{H}^p, dA^{p-1}, \delta A^{p+1}$ が A^p の閉部分空間でたがいに直交していることを意味する．ここでは完全な証明を与えることはできないが，まず $\boldsymbol{H}^p, dA^p, \delta A^{p-1}$ が直交していることはすぐわかる．実際，$\alpha \in \boldsymbol{H}^p$, $d\beta \in dA^{p-1}$, $\delta\gamma \in \delta A^{p+1}$ とすると，

$$(\alpha, d\beta) = (\delta\alpha, \beta) = 0, \quad (\alpha, \delta\gamma) = (d\alpha, \gamma) = 0, \quad (d\beta, \delta\gamma) = (d^2\beta, \gamma) = 0.$$

次に，$\alpha \in A^p$ が $dA^{p-1} \oplus \delta A^{p+1}$ に直交しているとすると，すべての $\beta \in A^{p-1}$ と $\gamma \in A^{p+1}$ に対し

$$0 = (\alpha, d\beta) = (\delta\alpha, \beta), \qquad 0 = (\alpha, \delta\gamma) = (d\alpha, \gamma)$$

が成り立つから，$\delta\alpha = 0$ と $d\alpha = 0$ が成立，すなわち，$\alpha \in \boldsymbol{H}^p$ となる．したがって，dA^{p-1} と δA^{p+1} が内積 (,) で定義されたトポロジーに関して A^p で閉じていることがわかれば，(8.34) の分解が得られる．証明の方針としては，まず $\boldsymbol{H}^p$ が有限次元であることを証明する．(そのためには，“列 $\varphi_k \in A^p(M)$ が $\|\varphi_n\| \leqq c$, $\|\Delta\varphi_n\| \leqq c$ を満たすならば適当な部分列が Cauchy 列になる” ということを証明する．) 次に $\boldsymbol{H}^p$ の正規直交基 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ をとり

(7.35) $$H\varphi = \sum_{i=1}^{m} (\varphi, \omega_i)\omega_i, \qquad \varphi \in A^p$$

により **調和射影** (harmonic projection) $H: A^p \to \boldsymbol{H}^p$ を定義する．定義から $\varphi - H\varphi$ は $\boldsymbol{H}^p$ と直交することがわかる．証明の一番難しいところは，$\boldsymbol{H}^p$ に直交する元 $\beta \in (\boldsymbol{H}^p)^\perp \subset A^p$ に対し，

(7.36) $$\Delta\psi = \beta$$

となる $\psi \in A^p$ の存在を示すことである．これを $\beta = \varphi - H\varphi$ に適用すれば，分解

(7.37) $$\varphi = H\varphi + \Delta\psi = H\varphi + d\delta\psi + \delta d\psi$$

を得る．(7.36) の解 ψ の存在を仮定すれば，$\psi - H\psi$ を考えることにより，ψ を $(\boldsymbol{H}^p)^\perp$ の中にみつけることができる．さらに，$(\boldsymbol{H}^p)^\perp$ の中では ψ は一意に定まる．したがって，$\varphi \in A^p$ に対して $\Delta\psi = \varphi - H\varphi$ となる $\psi \in (\boldsymbol{H}^p)^\perp$

が一意に対応する．この対応

$$G : A^p \longrightarrow (\boldsymbol{H}^p)^\perp, \qquad G\varphi = \psi \tag{7.38}$$

を **Green の作用素** (Green's operator) と呼ぶ．したがって (7.37) は

$$\varphi = H\varphi + \Delta G\varphi = H\varphi + d(\delta G\varphi) + \delta(dG\varphi) \tag{7.39}$$

と書ける．詳しいことは [W] 等を参照されたい．

定義から，G は $\boldsymbol{H}^p$ の上では 0 で，$(\boldsymbol{H}^p)^\perp$ 上では Δ^{-1} であることから，Δ と可換な作用素 $S : A^p \to A^p$ $(\Delta \circ S = S \circ \Delta)$ は G とも可換 $(G \circ S = S \circ G)$ であることがわかる．特に，

$$G \circ d = d \circ G, \qquad \delta \circ G = G \circ \delta, \qquad G \circ \Delta = \Delta \circ G \tag{7.40}$$

であることを注意しておく．

Hodge の分解を使うと $\boldsymbol{H}^p \oplus dA^{p-1}$ が閉じた p 次微分形式の全体になることがわかる．したがって，de Rham コホモロジー $H^p(M ; \boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{H}^p$ と同型になる．

$$\boldsymbol{H}^p \cong H^p(M ; \boldsymbol{R}) . \tag{7.41}$$

ラプラシアン Δ は $*$ と可換だから，$*$ は $\boldsymbol{H}^p$ から $\boldsymbol{H}^{n-p}$ への同型写像を与える．

$$* : \boldsymbol{H}^p \cong \boldsymbol{H}^{n-p} . \tag{7.42}$$

さらに，双1次写像

$$H^p(M ; \boldsymbol{R}) \times H^{n-p}(M ; \boldsymbol{R}) \longrightarrow \boldsymbol{R}, \qquad \boldsymbol{H}^p \times \boldsymbol{H}^{n-p} \longrightarrow \boldsymbol{R} \tag{7.43}$$

を

$$(\varphi, \psi) \longrightarrow \int_M \varphi \wedge \psi \tag{7.44}$$

で定義すると，これは φ と ψ のコホモロジー類にしか依存しないで定義されている．実際，

$$\int_M (\varphi + d\xi) \wedge (\psi + d\eta) = \int_M \varphi \wedge \psi + d(\xi \wedge \psi + \xi \wedge d\eta \pm \varphi \wedge \eta)$$

$$= \int_M \varphi \wedge \psi .$$

そして，双線形写像 (7.43) により $\boldsymbol{H}^p$ と $\boldsymbol{H}^{n-p}$ は双対になる．すなわち，$\varphi \in$

$\boldsymbol{H}^p$ がすべての $\psi \in \boldsymbol{H}^{n-p}$ に対し

$$\int \varphi \wedge \psi = 0$$

となるならば $\varphi = 0$ である．なぜなら，$\varphi \neq 0$ としたとき，$\psi = *\varphi$ とおけば $\int \varphi \wedge *\varphi = (\varphi, \varphi) > 0$ だからである．これは **de Rham** コホモロジーにおける **Poincaré の双対定理** (Poincaré duality) と呼ばれる．

問題 7.1 $2m$ 次元コンパクト・リーマン多様体 M 上で，m 次微分形式 φ が調和形式ならば，計量を共形変換しても調和形式であることを証明せよ．

4
特性類

我々は de Rham コホモロジーを使うので，特性類も微分形式で表わす．歴史的に一番古いのは Euler 類で，それを曲率で表わすのが Gauss-Bonnet の式である．Pontrjagin 類や Chern 類を表わす式は，初め多様体(の接ベクトル束)に対して得られたが，接続が一般の主ファイバー束に定義されるに及んで一般のベクトル束にまで拡張された．そのような一般化により，特性類の公理的扱いも可能になり理論も簡単になった．ユニタリ群の方が直交群より構造が簡単なので，Chern 類を基にして Pontrjagin を定義するのがいまでは慣例であるので我我もそれに従った．§8 の葉層構造における Bott の定理は後で必要としないが，Pontrjagin 類の微分形式による表現と接続が本質的役割を演ずるので 2 章と 4 章で学んだことの理想的応用といえる．

§1. 複素ベクトル束

1章の§1で(実)ベクトル束を定義したが，この節では，複素ベクトル束を必要とする．その定義はほとんど明らかであろうが一応説明しておく．

Mをn次元多様体とする．EがM上の**複素ベクトル束** (complex vector bundle) であるとは，まず1章§1で定義したように，(実) ベクトル束であり，さらに次の条件を満たすものである．各点 $x \in M$ でファイバー $E_x = \pi^{-1}(x)$ は一定次元 (例えばr次元) の複素ベクトル空間で1章 (1.1) の局所同型写像

$$(1.1) \qquad \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U \times C^r$$

は各点 $y \in U$ で複素同型写像 $\varphi(y): E_y \to \{y\} \times C^r \approx C^r$ を引きおこす．

したがって変換関数 $\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta{}^{-1} \to GL(2r; R)$ は，実は部分群 $GL(r; C) \subset GL(2r; R)$ に値をとることになる (1章 (1.4) 参照)：

$$(1.2) \qquad \psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r; C)\,.$$

Mが複素多様体で，変換関数 (1.2) が正則ならば，Eを**正則ベクトル束** (holomorphic vector bundle) と呼ぶが，ここではそのような仮定はしない．

Eが複素ベクトル束ならば，複素数をEの元に掛けるという作用がある．特に $i = \sqrt{-1}$ を掛ける作用をJと書く．

$$(1.3) \qquad J: E \longrightarrow E, \qquad J\xi = i\xi\,.$$

JはEの自己同型写像で

$$(1.4) \qquad J^2 = -I \qquad (J^2\xi = -\xi,\ \xi \in E)$$

となることは明らか．

逆に，Eを実ベクトル束で，(1.4) を満たす自己同型写像Jをもっていると仮定すると，複素数 $\alpha = a + bi$ をEに掛けることができる．すなわち，

$$(a + bi)\xi = (a + bJ)\xi\,, \qquad \xi \in E$$

と定義すれば，E_xは複素ベクトル空間になる．局所的に $U \times C^r$ となること

もすぐわかる．まず，実ベクトル束としての局所標構 $e_1, \cdots, e_{2r}$ を，点 x の近傍でとる．線形変換で $Je_1(x) = e_2(x)$，…，$Je_{2r-1}(x) = e_{2r}(x)$ とできる．x の充分小さい近傍では $e_1, Je_1, \cdots, e_{2r-1}, Je_{2r-1}$ は1次独立，したがって局所標構になる．対応

$$\xi = a_1 e_1 + b_1 Je_1 + \cdots + a_r e_{2r-1} + b_r Je_{2r-1} \tag{1.5}$$
$$\longleftrightarrow (a_1 + b_1 i,\ \cdots,\ a_r + b_r i)$$

によって E は局所的に $U \times C^r$ の形であることがわかる．

したがって，複素ベクトル束とは実ベクトル束で，(1.4) を満たす自己同型写像 J をもつものであるということができる．

実ベクトル束に同伴する主ファイバー束を2章の §4 で考えた．複素ベクトル束 E に同伴する主ファイバー束 P としては，もう少し小さな束を使うのが自然である．すなわち2章の (4.1) のごとく実同型写像 $u : R^{2r} \to E_x$ 全部を考えず複素同型写像 $u : C^r \to E_x$，すなわち

$$u(iz) = J(u(z)), \qquad z \in C^r \tag{1.6}$$

となる同型写像だけ考えると $GL(2r\,;R)$ の部分群 $GL(r\,;C)$ を構造群とする主ファイバー束 P が得られる．

2章の §3 では内積をもった実ベクトル束を考えた．複素ベクトル束 E の場合には内積というとき，Hermite 内積の意味である．以下は複素ベクトル空間の Hermite 内積 h についての一般論であるから，$V = E_x$ とおいて説明する．定義により，h は写像

$$h : V \times V \longrightarrow C \tag{1.7}$$

で次の性質をもつものである．

(i)　$h(z, w)$ は z に関して C 上線形，すなわち，$z, z', w \in V, c \in C$ に対し

$$h(z + z', w) = h(z, w) + h(z', w)\,, \qquad h(cz, w) = c \cdot h(z, w)\,,$$

(ii)　$$h(w, z) = \overline{h(z, w)}\,,$$

(iii)　$0 \neq z \in V$ ならば，$h(z, z) > 0$．

$V = \boldsymbol{C}^r$ の場合，自然な Hermite 内積は，

(1.8)　$h(z, w) = \sum z^j \bar{w}^j, \qquad z = (z^1, \cdots, z^r),\ w = (w^1, \cdots, w^r) \in \boldsymbol{C}^r$

である．$z^j = x^j + i y^j$，$w^j = u^j + i v^j$ とおけば，

(1.9)　$$h(z, w) = \sum (x^j u^j + y^j v^j) + i \sum (y^j u^j - x^j v^j)$$

であるから，$h(z, w)$ の実部 $\sum (x^j u^j + y^j v^j)$ は $\boldsymbol{C}^r$ を $\boldsymbol{R}^{2r}$ とみなしたときの $\boldsymbol{R}^{2r}$ の自然な内積になっている．

したがって，一般の場合にも，h の実部を g と定義する．

(1.10)　$$g(z, w) = \mathrm{Re}(h(z, w)).$$

このとき，g は V を $2r$ 次元実ベクトル空間とみなしたときの内積になっている．すなわち，

(i)　　$g(z, w)$ は z に関して $\boldsymbol{R}$ 上線形，

(ii)　　$g(w, z) = g(z, w)$，

(iii)　　$0 \neq z \in V$ ならば，$g(z, z) > 0$

である．さらに，この内積は，条件

(iv)　　$g(Jz, Jw) = g(z, w)$　　（ここで $Jz = iz$，$Jw = iw$）

を満たすこともすぐわかる．

逆に，(i)～(iv) を満たす g が与えられたとき，g を実部とする Hermite 内積 h がただ一つ定まる．実際 $h(iz, w) = i \cdot h(z, w)$ だから，h の虚部 $\mathrm{Im}\, h$ は $\mathrm{Im}\, h(z, w) = \mathrm{Re}(h(Jz, w))$ でなければならない．したがって

(1.11)　$$h(z, w) = g(z, w) + i g(Jz, w)$$

と h を定義すればよい．

このように $\boldsymbol{C}^r$, h の代わりに $\boldsymbol{R}^{2r}$, J, g を使って，すべてを実数の範囲ですますことも可能であるが，我々は主に h を使うことにする．

$e_1, \cdots, e_r$ を V の基とするとき

(1.12)　$$h_{\lambda\bar{\mu}} = h(e_\lambda, e_\mu)$$

と定義すれば，$(h_{\lambda\bar{\mu}})$ は正値 Hermite 行列になる．$\bar{\mu}$ と書くのは $h(z, cw) = \bar{c} h(z, w)$ だから計算上その方が都合がよいというテンソル解析の約束にもと

ずく.

2章の §1 で実ベクトル束の接続を定義した. 複素ベクトル束 E の場合を考えるために, $A^0(M)$ を M 上の C^∞ の複素関数の全体とする. そして2章の式 (1.2), すなわち

$$(1.13)\qquad \nabla(f\xi)=df\otimes\xi+f\cdot\nabla\xi,\qquad f\in A^0(M),\ \xi\in\Gamma(E)$$

が複素関数 f に対して成り立つと仮定する. これは (1.13) が実関数 f に対し成り立ち, さらに

$$(1.14)\qquad \nabla(c\xi)=c\nabla(\xi),\qquad c\in \boldsymbol{C},\ \xi\in\Gamma(E)$$

が成り立つという条件と同値である. 条件 (1.14) は $c=\sqrt{-1}$ に対して成り立てば充分であるから, (1.14) の代わりに

$$(1.15)\qquad \nabla(J\xi)=J\nabla(\xi),\qquad \xi\in\Gamma(E)$$

としてもよい. 一般に, $A\in\Gamma(\mathrm{End}\,E)$ に対し (2章 (1.21) 参照)

$$\nabla(A\xi)=(\nabla A)\xi+A\cdot\nabla\xi$$

であるから, (1.15) は

$$(1.16)\qquad \nabla J=0$$

とも書ける. 今後, 複素ベクトル束の接続というときは, ことわらない限り, この条件が満たされているものとする.

複素ベクトル束 E に同伴する主 $GL(r;\boldsymbol{C})$ 束を P としたが E を実ベクトル束とみなしたときの主 $GL(2r;\boldsymbol{R})$ 束を P' としよう. もちろん, $P\subset P'$ である. E を実ベクトル束とみなしたときの接続, すなわち (1.13) を実関数 f に対してだけ仮定し (1.14) を仮定しない接続は, P' の接続であり, E を複素ベクトル束として (1.14) も仮定した接続は P の接続になる.

2章の §4 (特に (4.12) 参照) で内積をもった実ベクトル束に対し, 同伴する主ファイバー束を構成した. 同様に内積をもった複素ベクトル束 E には, ユニタリ群 $U(r)$ を構造群とする主ファイバー束 $Q\subset P$ が定義される. そして, E の内積を保つ接続とは Q の接続にほかならない.

複素ベクトル束 E の接続 ∇ の曲率 R は $A^2(\mathrm{End}\,E)$ に属するが，この場合 $\mathrm{End}\,E$ は E の複素自己準同型写像（すなわち，J と可換な実自己準同型写像）の束であることに注意しておく．

E の内積を保つ接続の曲率 R が歪 Hermite であることは，実ベクトル束の場合 R が歪対称になるのと同様にして確かめられる．また，これはユニタリ群 $U(r)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(r)$ が歪 Hermite な行列から成り立っていることからきている．

§2. Chern 類

この節では，M は n 次元多様体，E は M 上の複素ベクトル束でそのファイバーは C^r，$\pi: E \to M$ は束の射影 $E_x = \pi^{-1}(x) \approx C^r$ は $x \in M$ 上のファイバーとする．E に同伴する主ファイバー束を P とする．その構造群は $GL(r\,;C)$ である．また，E の接続 ∇ は，前節で説明したように，条件 (1.14)（すなわち，(1.16)）を満たすものとする．

前節同様，$A^0(M)$ は M 上の微分可能な複素関数全体（のつくる多元環）とする．$A^p(E)$ は，E に値をもつ M 上の p 次微分形式の全体のつくる加群とする．（$f \in A^0(M)$ と $\xi \in A^p(E)$ に対し，自然に $f\xi \in A^p(E)$ が定義され，$A^p(E)$ は $A^0(M)$ 上の加群になる．）

接続 $\nabla: A^0(E) \to A^1(E)$ を共変外微分

(2.1) $$D: A^p(E) \longrightarrow A^{p+1}(E)$$

に拡張し，曲率 $R \in A^2(\mathrm{End}\,E)$ を

(2.2) $$R = D \circ D: A^0(E) \longrightarrow A^2(E)$$

によって定義した (2 章 (2.2), (2.7) 参照)．∇ が (1.14) を満たすことから，R は E の複素ベクトル束としての $\mathrm{End}\,E$ に値をもつことも §1 で注意したとおりである．

一般に，ベクトル空間 V の線形変換 $L: V \to V$ が与えられたとき，L の不変量（すなわち，V の基に依存しない量）として L の固有値の対称関数がある．それらは，例えば，$\det(\lambda I - L)$ を展開したとき λ^k の係数として得られる．したがって我々は，

$$(2.3)\qquad \det\left(\lambda I - \frac{R}{2\pi i}\right)$$
$$= \lambda^r + c_1(E,\nabla)\lambda^{r-1} + c_2(E,\nabla)\lambda^{r-2} + \cdots + c_r(E,\nabla)$$

という展開を考える．ここで，I はもちろんベクトル束 E の恒等変換である．曲率 R は $A^0(\mathrm{End}\,E)$ の元ではなく，$A^2(\mathrm{End}\,E)$ の元であるが，偶数次の微分形式は他の微分形式と可換なので，行列式 det の定義の式に 2 次の微分形式が入ってきても普通の数のように扱える．分母の $2\pi i$ は後でわかるように，上式で定義された $c_1(E,\nabla), \cdots, c_r(E,\nabla)$ が単に コホモロジー $H^*(M; \boldsymbol{C})$ の元を与えるだけでなく $H^*(M; \boldsymbol{Z})$ の元を与えるようにするために必要である．R が 2 次微分形式だから，$c_k(E,\nabla)$ は $2k$ 次微分形式になる．$\det\left(\lambda I - \dfrac{R}{2\pi i}\right)$ を局所標構を使って説明しておく．2 章 (2.14) で示したように，曲率 R は U_α 上の局所標構をえらぶことにより，$\mathfrak{gl}(r; \boldsymbol{C})$ 値の 2 次微分形式 Ω_α で表わされ，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上では

$$(2.4)\qquad \Omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}{}^{-1}\Omega_\alpha\psi_{\alpha\beta}$$

が成り立つ．したがって，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上で

$$(2.5)\qquad \det\left(\lambda I - \frac{\Omega_\beta}{2\pi i}\right) = \det\left(\psi_{\alpha\beta}{}^{-1}\left(\lambda I - \frac{\Omega_\alpha}{2\pi i}\right)\psi_{\alpha\beta}\right)$$
$$= \det\left(\lambda I - \frac{\Omega_\alpha}{2\pi i}\right)$$

となるから，(2.5) は M 上の微分形式を定義する．これが $\det\left(\lambda I - \dfrac{R}{2\pi i}\right)$ である．

束 E の接続 ∇ は E からつくられる種々の束に自然に接続を引きおこす．特に，束 $\mathrm{End}\,E = E \otimes E^*$，$\det E = \wedge^r E$，$\det E^* = \wedge^r E^*$，$\mathrm{End}(\det E) = (\det E) \otimes \det(E^*)$ 等に接続を引きおこす（2 章 §1 参照）．これらの束に定義

される共変外微分をすべて D と書く．しかし，$\mathrm{End}(\det E)$ は直積束 $M\times \boldsymbol{C}$ に同型で，この場合には D は普通の外微分 d と一致する．（これは $\det E$ が線束，すなわちファイバーが1次元のベクトル束であるという事実にもとずいている．） さて，$\lambda I-\dfrac{R}{2\pi i}$ は $\mathrm{End}\,E$ に値をもつ微分形式，そして $\det\left(\lambda I-\dfrac{R}{2\pi i}\right)$ は $\mathrm{End}(\det E)$ に値をもつ微分形式と考える．上に述べたように

$$(2.6)\qquad d\left(\det\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)\right)=D\left(\det\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)\right).$$

一方，Bianchi の恒等式 (2 章 (2.16)) により

$$(2.7)\qquad D\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)=0$$

であるから，

$$(2.8)\qquad d\left(\det\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)\right)=0$$

を得る．ただし，$D\left(\det\left(\lambda I-\dfrac{R}{2\pi i}\right)\right)=\det\left(D\left(\lambda I-\dfrac{R}{2\pi i}\right)\right)$ ではなく，D が Leibnitz の式を満たすことから (2.8) が証明されることに注意しておく．詳しくは，E の切断を r 個 $\xi_1,\cdots,\xi_r$ とり，

$$(2.9)\qquad \det\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_r)$$
$$=\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)\xi_1\wedge\cdots\wedge\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)\xi_r$$

に D を作用させることにより $D\left(\det\left(\lambda I-\dfrac{R}{2\pi i}\right)\right)=0$，すなわち (2.8) を得る．

(2.8) を書きかえれば

$$(2.10)\qquad d(c_k(E,\nabla))=0,\qquad k=1,\cdots,r.$$

したがって，$c_k(E,\nabla)$ は de Rham コホモロジー $H^{2k}(M;\boldsymbol{C})$ の元を定義する．このコホモロジー類が，接続 ∇ のえらび方に依存しないことを証明しよう．E の二つの接続 ∇_0,∇_1 を考える．そして

$$(2.11)\qquad \alpha=\nabla_1-\nabla_0$$

とおけば，$f\in A^0(M)$，$\xi\in\Gamma(E)$ に対し

$$\begin{aligned}\alpha(f\xi) &= \nabla_1(f\xi)-\nabla_0(f\xi)\\ &= df\cdot\xi+f\cdot\nabla_1(\xi)-df\cdot\xi-f\cdot\nabla_0(\xi)=f\cdot\alpha(\xi)\end{aligned}$$

であるから，$\alpha\in A^1(\mathrm{End}\,E)$．この二つの接続を直線

$$\nabla_t=(1-t)\nabla_0+t\nabla_1=\nabla_0+t\alpha\,,\qquad 0\leqq t\leqq 1 \tag{2.12}$$

で結ぶ．各 t について，∇_t は接続である．対応する共変外微分 D_t も $D_t=(1-t)D_0+tD_1$ と書ける．∇_t の曲率 R_t は

$$R_t=D_t\circ D_t=(D_0+t\alpha)\circ(D_0+t\alpha)\,. \tag{2.13}$$

したがって

$$\frac{dR_t}{dt}=\frac{dD_t}{dt}\circ D_t+D_t\circ\frac{dD_t}{dt}=\alpha\circ D_t+D_t\circ\alpha=D_t\alpha. \tag{2.14}$$

念のため，(2.14) の最後の等号を説明する．$\xi\in\Gamma(E)$ に対し，

$$(\alpha\circ D_t)\xi+(D_t\circ\alpha)\xi=\alpha\wedge(D_t\xi)+(D_t\alpha)\xi-\alpha\wedge(D_t\xi)=(D_t\alpha)\xi\,.$$

ここで，$\alpha\wedge(D_t\xi)$ は $D_t\xi\in A^1(E)$ に $\alpha\in A^1(\mathrm{End}\,E)$ を微分形式としての外積と End E の元を E に作用させる線形変換と両方の意味で掛けている．

(2.9) の意味で $\det\left(\lambda I-\dfrac{R}{2\pi i}\right)$ を

$$\det\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)=\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)\wedge\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\lambda I-\frac{R}{2\pi i}\right) \tag{2.15}$$

と書き，同じ意味で記号 $\wedge$ を使って，

$$\varphi=-\frac{r}{2\pi i}\int_0^1\alpha\wedge\left(\lambda I-\frac{R_t}{2\pi i}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\lambda I-\frac{R_t}{2\pi i}\right)dt \tag{2.16}$$

と定義する．Bianchi の恒等式により

$$D_t\left(\lambda I-\frac{R_t}{2\pi i}\right)=0\,. \tag{2.17}$$

(2.17) と (2.14) を使って

$$d\varphi=-\frac{r}{2\pi i}\int_0^1 d\left(\alpha\wedge\left(\lambda I-\frac{R_t}{2\pi i}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\lambda I-\frac{R_t}{2\pi i}\right)\right)dt$$

$$= -\frac{r}{2\pi i}\int_0^1 D_t\left(\alpha \wedge \left(\lambda I - \frac{R_t}{2\pi i}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\lambda I - \frac{R_t}{2\pi i}\right)\right)dt$$

$$= r\int_0^1 -\frac{1}{2\pi i}D_t\alpha \wedge \left(\lambda I - \frac{R_t}{2\pi i}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\lambda I - \frac{R_t}{2\pi i}\right)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\left(\lambda I - \frac{R_t}{2\pi i}\right) \wedge \left(\lambda I - \frac{R_t}{2\pi i}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\lambda I - \frac{R_t}{2\pi i}\right)\right)dt\,.$$

したがって，

$$d\varphi = \det\left(\lambda I - \frac{R_1}{2\pi i}\right) - \det\left(\lambda I - \frac{R_0}{2\pi i}\right) \tag{2.18}$$

を得る．これで $\det\left(\lambda I - \frac{R}{2\pi i}\right)$ のコホモロジー類は接続に依存しないことがわかった．

$\lambda = 1$ として，

$$\begin{aligned} c(E,\nabla) &= \det\left(I - \frac{R}{2\pi i}\right) \\ &= 1 + c_1(E,\nabla) + c_2(E,\nabla) + \cdots + c_r(E,\nabla) \end{aligned} \tag{2.19}$$

を**全 Chern 形式** (total Chern form)，$c_k(E,\nabla)$ を**第 k Chern 形式** (k-th Chern form) と呼ぶ．これらは曲率 R に（したがって接続 ∇ に）依存する．$c(E,\nabla)$ および $c_k(E,\nabla)$ のコホモロジー類は ∇ に依存しないから，$c(E)$，$c_k(E)$ と書き，それぞれ**全 Chern 類** (total Chern class)，**第 k Chern 類**(k-th Chern class) と呼ぶ．

ベクトル束 E の局所標構 $e_1,\cdots,e_r$ に関して曲率 R を 2 次微分形式の行列 $(\Omega_j{}^i)$ で表わし，Chern 形式 $c_k(E,\nabla)$ を具体的に $(\Omega_j{}^i)$ を使って書いてみよう．それには，行列 $A=(a_j{}^i)$ に対し $\det(I-A)$ を計算して，$a_j{}^i$ に $\Omega_j{}^i$ を代入すればよい．実際に $\det(\lambda I - A)$ の λ^{n-k} の係数を求めるには，$\det(\lambda I - A)$ を λ について $n-k$ 回微分して $\lambda=0$ とおけば主小行列式の和となることがすぐわかり計算しやすい．具体的には次式を得る．

$$c_1(E,\nabla) = -\frac{1}{2\pi i}\sum \Omega_j{}^j = -\frac{1}{2\pi i}(\Omega)\,,$$

$$c_2(E,\nabla) = -\frac{1}{8\pi^2}\sum (\Omega_j{}^j \wedge \Omega_k{}^k - \Omega_k{}^j \wedge \Omega_j{}^k)\,.$$

一般には

$$(2.20) \qquad c_k(E,\nabla) = -\frac{(-1)^k}{(2\pi i)^k k!}\sum \delta_{i_1\cdots i_k}{}^{j_1\cdots j_k}\Omega_{j_1}{}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega_{j_k}{}^{i_k}.$$

ここで $\delta_{i_1\cdots i_k}{}^{j_1\cdots j_k}$ は，$j_1,\cdots,j_k$ が $i_1,\cdots,i_k$ の偶置換なら 1，奇置換なら -1，それ以外の場合は 0 を意味する．最後の $c_r(E,\nabla)$ はもちろん

$$c_r(E,\nabla) = -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^r \det(\Omega)$$

となる．

いままでの議論では，$c_k(E)$ が $H^{2k}(M;\boldsymbol{C})$ の元であっても $H^{2k}(M;\boldsymbol{R})$ の元であることを示していない．適当な接続 ∇ に対し $c_k(E,\nabla)$ が実微分形式であることを証明しよう．そのために，E に内積 h をとり，h を保つ接続 ∇ を考える．そのとき，曲率 R は (h に関して) 歪 Hermite であった（§1 参照）．すなわち正規直交する局所標構に関して，曲率 R は 2 次微分形式のつくる歪 Hermite 行列 $\Omega=(\Omega_j{}^i)$,

$${}^t\Omega = -\bar{\Omega}, \qquad (\Omega_i{}^j = -\bar{\Omega}_j{}^i)$$

で与えられる．したがって，

$$\begin{aligned} c(E,\nabla) &= \det\left(I-\frac{\Omega}{2\pi i}\right) = \det{}^t\left(I-\frac{\Omega}{2\pi i}\right) \\ &= \det\left(I+\frac{\bar{\Omega}}{2\pi i}\right) = \det\left(\overline{I-\frac{\Omega}{2\pi i}}\right) = \overline{c(E,\nabla)}. \end{aligned}$$

これで $c(E,\nabla)$ は実微分形式であることがわかった．

実際には，$c_k(E)$ が $H^{2k}(M;\boldsymbol{Z})$ の元（正確には $H^{2k}(M;\boldsymbol{Z})\to H^{2k}(M;\boldsymbol{R})$ の像の元）であるが，これを証明するには Chern 類を $H^*(M;\boldsymbol{Z})$ の元として与えるような別の定義と比べることが必要である．($c_k(E,\nabla)$ を M の整係数のサイクルの上で積分して整数になることを直接確かめるのは無理であろう．) Chern 類の定義はいくつかあるが，公理による定義を使うのが，いまの場合，最小限の知識ですむ．公理系は多様体上の複素ベクトル束全体の圏 (category) に対し次の 4 条件からなる．

公理 1 E が M 上の複素ベクトル束なら，各整数 $k \geqq 0$ に対し $c_k(E) \in H^{2k}(M;\boldsymbol{R})$ が定義され，$c_0(E)=1$ である．

以後，

$$c(E)=\sum_k c_k(E)$$

と書く．

公理 2 E が M 上の複素ベクトル束，N がもう一つの多様体，$f: N \to M$ が微分可能な写像ならば

$$c(f^*E)=f^*(c(E)) \in H^*(N;\boldsymbol{R}) .$$

公理 3 E_1 と E_2 が M 上の複素ベクトル束ならば

$$c(E_1 \oplus E_2)=c(E_1)\cdot c(E_2) .$$

これだけだと，例えば $c_k(E)=0$ $(k>0)$ と，すべての E に対して定義しても公理が満たされているが，次の公理 4 がそのような可能性を除く．まず，1 次元複素射影空間 $P_1\boldsymbol{C}$ (すなわちリーマン球 S^2) 上に，ある特殊な複素直線束 (すなわち，$\boldsymbol{C}$ をファイバーとする複素ベクトル束) L を構成する必要がある．$P_1\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{C}^2$ の複素 1 次元部分空間の集合である．$\zeta \in \boldsymbol{C}^2$, $\zeta \neq 0$ ならば，ζ の定める 1 次元部分空間 $\{c\zeta ; c \in \boldsymbol{C}\}$ を $[\zeta]$ と書く．$[\zeta]$, $[\zeta'] \in P_1\boldsymbol{C}$ が等しいのは適当な $c \in \boldsymbol{C}$ に対し，$\zeta'=c\zeta$ となることである．$\zeta=(z^0,z^1) \in \boldsymbol{C}^2-\{0\}$ は $z^0 \neq 0$ ならば，$\zeta'=(1,z^1/z^0)$ と同じ $P_1\boldsymbol{C}$ の点を与える．一方，$(0,z^1) \in \boldsymbol{C}^2-\{0\}$ はすべて $P_1\boldsymbol{C}$ の同一点を与える．この点を無限遠点と呼び ∞ で表わすと，写像

$$(z^0,z^1) \longmapsto z^1/z^0$$

は $P_1\boldsymbol{C}-\{\infty\}$ と $\boldsymbol{C}$ の間に 1 対 1 の対応を与える．したがって，

$$P_1\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$$

となる．さて，$P_1\boldsymbol{C}$ 上の直線束 L は，直積束 $P_1\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^2$ の部分束として

$$L=\{([\zeta],c\zeta) \in P_1\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^2 ; c \in \boldsymbol{C}\} \tag{2.21}$$

で定義される．すなわち，P_1C の点 $[\zeta]$ におけるファイバー $L_{[\zeta]}$ は，ζ によって定まる C^2 の 1 次元部分空間 $\{c\zeta\,;\,c\in C\}$ である．

公理 4　上で定義された直線束 L に対しては $-c_1(L)$ が $H^2(P_1C, Z)=Z$ の生成元 1 に対応する．すなわち，

$$\int_{P_1C} c_1(L) = -1\,. \tag{2.22}$$

微分形式 $c(E,\nabla)$ によって定義された Chern 類 $c(E)$ が以上の 4 公理を満たしていることを確かめるのは容易である．公理 1 は明白．公理 2 を確かめるには，E の接続 ∇ に対し，f^*E に誘導される接続 $f^*\nabla$ を考える．∇ の曲率 R と $f^*\nabla$ の曲率 f^*R を結ぶ図式

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{(f^*R)(X,Y)} & f^*E \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{R(f_*X,f_*Y)} & E \end{array}\ , \qquad X, Y\in T_yN \tag{2.23}$$

は可換である (2 章 (1.22), (2.22) 参照)．これは座標近傍 $U\subset M$ で定義された E の局所標構 $e_1, \cdots, e_r$ に対応する f^*E の局所標構を $f^{-1}U$ 上にとったとき，(E,∇) の曲率形式が $\Omega=(\Omega_j{}^i)$ で与えられるならば，$(f^*E,\ f^*\nabla)$ の曲率形式は $f^*\Omega=(f^*\Omega_j{}^i)$ で与えられることだと考えてもよい．いずれにしても

$$f^*(c(E,\nabla)) = c(f^*E,\ f^*\nabla) \tag{2.24}$$

となる．すなわち，公理 2 はコホモロジーまでゆく前に微分形式のレベルですでに確かめられる．

公理 3 を確かめるには，E_1, E_2 の接続 ∇_1, ∇_2 に対し，$E_1\oplus E_2$ に自然に入る接続 $\nabla_1\oplus\nabla_2$ を使えばよい．∇_1, ∇_2 の曲率を R_1, R_2 とするとき，$\nabla_1\oplus\nabla_2$ の曲率は $R_1\oplus R_2$，行列の記号でいえば

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

の形をしているから,

$$\det\begin{pmatrix} I-\dfrac{R_1}{2\pi i} & 0 \\ 0 & I-\dfrac{R_2}{2\pi i}\end{pmatrix} = \det\left(I-\frac{R_1}{2\pi i}\right)\cdot\det\left(I-\frac{R_2}{2\pi i}\right)$$

となり,

$$(2.25) \qquad c(E_1\oplus E_2,\ \nabla_1\oplus\nabla_2) = c(E_1,\nabla_1)\cdot c(E_2,\nabla_2)$$

を得る. 公理 3 も微分形式のレベルで確かめられた.

公理 4 を確かめるには,

$$u = z^1/z^0$$

とおいて, u を $U=P_1C-\{\infty\}$ 内の座標として使う. 同様に

$$v = z^0/z^1$$

とおいて v を $V=P_1C-\{0\}$ 内の座標として使う. (ここで 0 は $z^0=0$ で与えられる P_1C の点を表わす.) $U\cap V$ 上では

$$u=\frac{1}{v}$$

である.

$$\sigma(u) = (1,u)\in L_u\subset C^2, \qquad u\in U,$$
$$\tau(v) = (v,1)\in L_v\subset C^2, \qquad v\in V$$

によって, L の U 上の標構 σ, V 上の標構 τ を定義する. 変換関数 g_{VU}: $U\cap V\longrightarrow GL(1;C)=C^*$ は

$$g_{VU}(u)=\frac{1}{u}=v, \qquad u=\frac{1}{v}\in U\cap V$$

で与えられる. (実際, $g_{VU}\cdot\sigma=\tau$ となることは容易にわかる.) 次に接続形式を

$$\omega_U = \frac{\bar u\,du}{1+|u|^2} \qquad (U\text{ 上で}),$$
$$\omega_V = \frac{\bar v\,dv}{1+|v|^2} \qquad (V\text{ 上で}),$$

と定義すれば,

$$\omega_V = \omega_U + g_{VU}{}^{-1} dg_{VU}$$

となることは簡単な計算で確かめられる．したがって，ω_U, ω_V は L の接続 ∇ を定義する．その曲率は

$$\Omega_U = d\omega_U = \frac{-du \wedge d\bar{u}}{(1+|u|^2)^2} \qquad (U \text{ 上で}),$$

$$\Omega_V = d\omega_V = \frac{-dv \wedge d\bar{v}}{(1+|v|^2)^2} \qquad (V \text{ 上で})$$

で与えられる．したがって，$U = P_1C - \{\infty\}$ 上で

$$c_1(L, \nabla) = \frac{du \wedge d\bar{u}}{2\pi i(1+|u|^2)^2}.$$

極座標 $u = re^{2\pi i\theta}$ とおけば

$$c_1(L, \nabla) = \frac{-2r\,dr \wedge d\theta}{(1+r^2)^2}.$$

したがって

$$\int_{P_1C} c_1(L, \nabla) = \int_U c_1(L, \nabla) = -\int_0^1 d\theta \int_0^\infty \frac{2r\,dr}{(1+r^2)^2} = -1.$$

これで 4 公理が確かめられた．

トポロジーの理論で，この 4 公理を満たす Chern 類の存在と一意性が知られているから，我々が微分形式を使って定義した Chern 類がトポロジー論での Chern 類と一致することになる．歴史的には Chern 類は障害類として定義され，同時に曲率による表現が与えられた．トポロジーの立場から書かれた特性類の本では [M-S] が特によい．

§3. 複素直線束の Chern 類

複素ベクトル束で，ファイバーの次元が 1 のものを**複素直線束** (complex line bundle) と呼ぶ．この場合，構造群は $C^* = GL(1; C)$ であり，特に可換群であることに注意する．いま，複素直線束 L が，開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ と変換関数 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ で与えられているとする．その場合，

$$\psi_{\alpha\beta}:\ U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \boldsymbol{C}^*$$

である．$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 上での関係式

(3.1) $$\psi_{\alpha\beta}\cdot\psi_{\beta\gamma}\cdot\psi_{\gamma\alpha}=1$$

の log をとると，

(3.2) $$\log\psi_{\alpha\beta}+\log\psi_{\beta\gamma}+\log\psi_{\gamma\alpha}\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi i)$$

となる．$\log\psi_{\alpha\beta}$ は一意には定義されず，$2\pi i$ の整数倍の曖昧さは残るが，各 (α,β) に対し $\log\psi_{\alpha\beta}=-\log\psi_{\beta\alpha}$ となるように $\log\psi_{\alpha\beta}$ をえらび，(3.2) を

(3.3) $$\log\psi_{\alpha\beta}+\log\psi_{\beta\gamma}+\log\psi_{\gamma\alpha}=2\pi i\, c_{\alpha\beta\gamma}, \qquad c_{\alpha\beta\gamma}\in\boldsymbol{Z}$$

と書いてみる．そのとき，1 章 §5 で説明した Čech コホモロジーの意味で $c=\{c_{\alpha\beta\gamma}\}$ は $C^2(\mathfrak{U};\boldsymbol{Z})$ の元となる．(3.3) から容易に

$$c_{\beta\gamma\delta}-c_{\alpha\gamma\delta}+c_{\alpha\beta\delta}-c_{\alpha\beta\gamma}=0$$

となることが確かめられる．すなわち，

(3.4) $$\delta c=0$$

となる．

(3.5) **定理** コサイクル $-c$ の定める $H^2(\mathfrak{U};\boldsymbol{Z})$ の元 $-[c]$ は，複素直線束 L の Chern 類 $c_1(L)$ にほかならない．（ここで $\mathfrak{U}$ は M の単純な開被覆とし，また $[c]$ は $H^2(\mathfrak{U};\boldsymbol{R})$ の元と考える．）

証明 1 章 §5 で Čech コホモロジー群 $H^p(\mathfrak{U};\boldsymbol{R})$ から，de Rham コホモロジー群 $H^p(M)$ への同型写像を構成したが，その方法を $[c]\in H^2(\mathfrak{U};\boldsymbol{Z})$ に適用する．$c\in C^2(\mathfrak{U};\boldsymbol{Z})$ を $C^2(\mathfrak{U};\mathscr{A}^0)$ の元と考え（すなわち整数 $c_{\alpha\beta\gamma}$ を $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ 上の恒等的に値 $c_{\alpha\beta\gamma}$ をとる関数と考え），まず $f=\{f_{\alpha\beta}\}\in C^1(\mathfrak{U};\mathscr{A}^0)$ で $c_{\alpha\beta\gamma}=f_{\beta\gamma}-f_{\alpha\gamma}+f_{\alpha\beta}$ となるものを探すのだが，いまの場合，$f_{\alpha\beta}=\dfrac{1}{2\pi i}\log\psi_{\alpha\beta}$ とすればよいことは (3.3) から明白である．(3.3) の外微分をとると

$$df_{\alpha\beta}+df_{\beta\gamma}+df_{\gamma\alpha}=0.$$

次に，$\theta=\{\theta_\alpha\}\in C^0(\mathfrak{U};\mathscr{A}^1)$ で $df_{\alpha\beta}=\theta_\beta-\theta_\alpha$ となるものを探す．そのために接続形式 $\omega=\{\omega_\alpha\}\in C^0(\mathfrak{U};\mathscr{A}^1)$ を考える．（一般に ω_α は構造群の Lie

環 $\mathfrak{g}$ に値をとる1次形式であるが，いまの場合 $\mathfrak{g}=\boldsymbol{C}$ であるから，ω は $C^0(\mathfrak{U}\,;\mathscr{A}^1)$ の元と考えられる．）構造群が可換だから，2章の式 (1.14) はいまの場合

$$(3.6)\qquad \omega_\beta-\omega_\alpha=\psi_{\alpha\beta}{}^{-1}d\psi_{\alpha\beta}=d\log\psi_{\alpha\beta}$$

となる．したがって，$\theta_\alpha=\dfrac{1}{2\pi i}\omega_\alpha$ とおけばよいことがわかる．最後に(3.6)の外微分をとれば $d\theta_\alpha=d\theta_\beta$ となることがわかる．M 上で定義された閉じた2次微分形式 $\Theta=\{d\theta_\alpha\}$ の定めるコホモロジー類が $[\,c\,]$ に対応する $H^2(M)$ の元である．$\theta_\alpha=\dfrac{1}{2\pi i}\omega_\alpha$ であるから $d\theta_\alpha=\dfrac{1}{2\pi i}d\omega_\alpha=\dfrac{1}{2\pi i}\Omega_\alpha$ となる．ただし，ここで $\Omega_\alpha=d\omega_\alpha$ は曲率形式である．Chern 類を与える式 (2.3) と比べれば $\Theta=\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\Omega_\alpha\right\}$ は $-c_1(L)$ を定義することがわかる．

さて，いくつかある Chern 類の定義の一つは，まず複素直線束 L に対し $c_1(L)$ を定義し（例えば，上のように $-[c]$ として），一般のベクトル束 E に対しては，次に説明するような Grothendieck による定義を使う．概略だけ述べると，まず，$x\in M$ でのファイバーを射影空間 $P(E_x)$ とするファイバー束 $P(E)$ を考える，$P(E)=\bigcup_{x\in M}P(E_x)$．$P(E_x)$ の点は E_x の複素1次元部分空間（複素直線）l である．射影 $p:P(E)\to M$ を使って E を引き戻す．すなわち $P(E)$ 上のベクトル束 p^*E を

$$(3.7)\qquad p^*E=\{(l,\eta)\in P(E)\times E\,;\,p(l)=\pi(\eta)\}$$

によって定義する．$x\in M$ を一つ固定したとき，$P(E_x)$ 上では p^*E は直積である．すなわち，

$$(3.8)\qquad p^*E|_{P(E_x)}=P(E_x)\times E_x\,.$$

ベクトル束 p^*E は次のような自然な直線部分束 $L(E)$ を含んでいる．$P(E)$ の点が E_x 内の複素直線 l で与えられるとき，その点でのファイバーとして直線 l そのものをとることにより $L(E)$ を得る．すなわち，

$$(3.9)\qquad L(E)=\{(l,\eta)\in p^*E\,;\,\eta\in l\}\,.$$

商ベクトル束 $p^*E/L(E)$ を $Q(E)$ と書けば，完全系列

$$(3.10)\qquad 0\longrightarrow L(E)\longrightarrow p^*E\longrightarrow Q(E)\longrightarrow 0$$

を得る．$\alpha = -c_1(L(E)) \in H^2(P(E)\,;\,\boldsymbol{Z})$ とおくと，$1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{r-1}$ を各ファイバー $P(E_x)$ に制限したものは，$H^*(P(E_x)\,;\,\boldsymbol{Z})$ の自由基になっているから，ファイバー束のトポロジーにおける Leray–Hirsch の定理により，$H^*(P(E_x)\,;\,\boldsymbol{Z})$ は $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{r-1}$ を基とする $H^*(M\,;\,\boldsymbol{Z})$ 上の自由な加群になる．特に，x^r は $H^*(M\,;\,\boldsymbol{Z})$ の元を係数にもつ $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{r-1}$ の1次結合として一意に表わされる．そのとき，

$$\alpha^r + c_1(E)\alpha^{r-1} + \cdots + c_{r-1}(E)\alpha + c_r(E) = 0 \tag{3.11}$$

によって E の Chern 類 $c_1(E), \cdots, c_r(E)$ が与えられる．（ただし，正確には (3.11) は $H^*(P(E)\,;\,\boldsymbol{Z})$ の中での式であるから，係数の $c_i(E)$ は $p^*c_i(E)$ と考えるべきである．）

§4. Chern 指標

ここでも E は M 上の複素ベクトル束とする．E の接続 ∇ の曲率 R を使って，(2.3) により Chern 類を定義した．同様に曲率 R を使い **Chern 指標形式** (Chern character form) なるものを

$$\begin{aligned} ch(E, \nabla) &= \mathrm{tr}\left(\exp\left(-\frac{R}{2\pi i}\right)\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(I - \frac{R}{2\pi i} + \frac{R^2}{2!\,(2\pi i)^2} - \frac{R^3}{3!\,(2\pi i)^3} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

で定義する．また

$$\begin{aligned} ch(E, \nabla) &= ch_0(E, \nabla) + ch_1(E, \nabla) + ch_2(E, \nabla) + \cdots, \\ ch_k(E, \nabla) &= \frac{1}{k!}\,\mathrm{tr}\left(\left(-\frac{R}{2\pi i}\right)^k\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

とおく．$ch_k(E, \nabla)$ が M 上の閉じた $2k$ 次微分形式になることは，§2 で $c_k(E, \nabla)$ が閉微分形式であることを証明したのと同様に証明される．そして，$ch_k(E, \nabla)$ の定めるコホモロジー群 $H^{2k}(M\,;\,\boldsymbol{R})$ の元が，接続 ∇ に依存しないことも $c_k(E, \nabla)$ の場合と同様である．（以下で，$ch(E, \nabla)$ を $c_k(E, \nabla)$ の多項式

として表わすが，それからもこれらの事実は確かめられる.） $ch(E,\nabla)$ によって定まるコホモロジー群 $H^*(M,\boldsymbol{R})$ の元を $ch(E)$ と書き，E の **Chern 指標** (Chern character) と呼ぶ.

さて Chern 類と Chern 指標の関係を述べるために，r 次の複素行列全体のつくる空間 $\mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{C})$ (すなわち $GL(r\,;\boldsymbol{C})$ の Lie 環) で定義された次の式を考える.

$$
(4.3)\qquad \begin{aligned} \sigma(Z) &= \det(I+Z), & Z\in\mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{C}),\\ \tau(Z) &= \operatorname{tr} e^{Z} & Z\in\mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{C}). \end{aligned}
$$

それぞれを

$$
(4.4)\qquad \begin{aligned} \sigma(Z) &= 1+\sigma_1(Z)+\sigma_2(Z)+\cdots+\sigma_r(Z), \qquad (\deg\sigma_k(Z)=k)\\ \tau(Z) &= r+\tau_1(Z)+\frac{1}{2\,!}\tau_2(Z)+\frac{1}{3\,!}\tau_3(Z)+\cdots, \\ &\qquad\qquad (\deg\tau_k(Z)=k) \end{aligned}
$$

とおけば，(2.3) および (4.1) から

$$
(4.5)\qquad \begin{aligned} &\sigma_k\Big(-\frac{R}{2\pi i}\Big) = c_k(E,\nabla)\,,\\ &\frac{1}{k\,!}\tau_k\Big(-\frac{R}{2\pi i}\Big) = ch_k(E,\nabla) \end{aligned}
$$

であるから σ_k $(k=1,\cdots,r)$ と τ_k $(k=1,2,\cdots)$ の間の関係式を求めれば，それが Chern 類と Chern 指標の間の関係を与える．任意の $A\in GL(r\,;\boldsymbol{C})$ に対し

$$
\sigma(AZA^{-1}) = \sigma(Z)\,,\qquad \tau(AZA^{-1}) = \tau(Z)
$$

であるから，適当な A で変換することにより Z は三角形

$$
Z = \begin{pmatrix} z_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & z_r \end{pmatrix}
$$

と仮定する．そうすれば，$\sigma_1(Z),\sigma_2(Z),\cdots,\sigma_r(Z)$ は $z_1,\cdots,z_r$ の基本対称式

$$
(4.6)\qquad \sigma_1(Z)=\sum z_j\,,\quad \sigma_2(Z)=\sum_{j<k} z_j z_k\,,\quad \cdots,\quad \sigma_r(Z)=z_1\cdots z_r
$$

となる．一方，$\tau_1(Z),\tau_2(Z),\cdots$ も $z_1,\cdots,z_r$ の対称式

$$(4.7)\qquad \tau_1(Z)=\sum_j z_j,\quad \tau_2(Z)=\sum_j z_j{}^2,\quad \tau_3(Z)=\sum_j z_j{}^3,\ \cdots$$

となる．これら二組の対称式は **Newton の公式** で結ばれている．簡単のために $\sigma_k=\sigma_k(Z)$，$\tau_k=\tau_k(Z)$ と書けば，Newton の公式は

$$(4.8)\qquad \begin{aligned}&\tau_k-\sigma_1\tau_{k-1}+\sigma_2\tau_{k-2}-\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}\tau_1+(-1)^k k\sigma_k=0,\\ &\qquad\qquad k=1,2,\cdots,r,\\ &\tau_l-\sigma_1\tau_{l-1}+\sigma_2\tau_{l-2}-\cdots+(-1)^r\sigma_r\tau_{l-r}=0,\\ &\qquad\qquad l=r+1,r+2,\cdots,\end{aligned}$$

で与えられる．特に，

$$(4.9)\qquad \begin{aligned}&\tau_1=\sigma_1,\quad \tau_2=\sigma_1{}^2-2\sigma_2,\quad \tau_3=\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,\\ &\tau_4=\sigma_1{}^4-4\sigma_1{}^2\sigma_2+2\sigma_2{}^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4.\end{aligned}$$

Chern 類は，整係数のコホモロジー群 $H^*(M;\boldsymbol{Z})$ に入っていたから，(4.5) と (4.8) ((4.9) も参照) を比べればわかるように，$k!\,ch_k(E)$ も $H^{2k}(M;\boldsymbol{Z})$ の元である．しかし，$ch_k(E)$ は $H^{2k}(M;\boldsymbol{Q})$ には入るが，$H^{2k}(M;\boldsymbol{Z})$ に入っているとは限らないことを注意しておく．

Chern 指標が Chern 類より勝れている点は，M 上の二つのベクトル束 E, E' に対し次式が成り立つことである．

$$(4.10)\qquad \begin{aligned}ch(E\oplus E')&=ch(E)+ch(E'),\\ ch(E\otimes E')&=ch(E)\cdot ch(E').\end{aligned}$$

もちろん，この式は微分形式のレベルで成り立つ．∇ と ∇' をそれぞれ E と E' の接続とするとき，

$$(4.11)\qquad \begin{aligned}ch(E\oplus E',\nabla\oplus\nabla')&=ch(E,\nabla)+ch(E',\nabla'),\\ ch(E\otimes E',\nabla\otimes\nabla')&=ch(E,\nabla)\cdot ch(E',\nabla')\end{aligned}$$

が成り立つ．(4.10) は (4.11) から得られるから (4.11) を証明する．R と R' をそれぞれ ∇ と ∇' の曲率とする．そのとき，$\nabla\oplus\nabla'$ の曲率は $R\oplus R'$，すなわち

$$(4.12)\qquad R\oplus R'=\begin{pmatrix}R&0\\0&R'\end{pmatrix}$$

で与えられるから，

$$ch(E\oplus E',\nabla\oplus\nabla') = \sum\frac{1}{k!}\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix} -\dfrac{R}{2\pi i} & 0 \\ 0 & -\dfrac{R'}{2\pi i}\end{pmatrix}^k$$

$$= \sum\frac{1}{k!}\,\mathrm{tr}\Big(-\frac{R}{2\pi i}\Big)^k + \sum\frac{1}{k!}\,\mathrm{tr}\Big(-\frac{R'}{2\pi i}\Big)^k$$

$$= ch(E,\nabla) + ch(E',\nabla') .$$

また $\nabla\otimes\nabla'$ の曲率は $R\otimes I_{E'}+I_E\otimes R'$ で与えられ，$R\otimes I_{E'}$ と $I_E\otimes R'$ は可換だから，

$$\exp\Big(-\frac{1}{2\pi i}(R\otimes I_{E'}+I_E\otimes R')\Big)$$

$$= \exp\Big(-\frac{1}{2\pi i}R\otimes I_{E'}\Big)\cdot\exp\Big(-\frac{1}{2\pi i}I_E\otimes R'\Big)$$

$$= \Big\{\sum\frac{1}{k!}\Big(-\frac{1}{2\pi i}R\otimes I_{E'}\Big)^k\Big\}\Big\{\sum\frac{1}{l!}\Big(-\frac{1}{2\pi i}I_E\otimes R'\Big)^l\Big\}$$

$$= \sum\frac{1}{k!\,l!}\Big(-\frac{1}{2\pi i}R\Big)^k\otimes\Big(-\frac{1}{2\pi i}R'\Big)^l.$$

両辺の跡 tr をとり，$\mathrm{tr}(A\otimes B)=\mathrm{tr}\,A\cdot\mathrm{tr}\,B$ を使えば (4.10) の二番目の式を得る.

問題 4.1　複素ベクトル束 E の Chern 類 $c(E)=\sum_{i=1}^{r}c_i(E)$ を形式的に

$$c(E)=\prod_{j=1}^{r}(1+z_j),\qquad \Big(\text{したがって，}c_1(E)=\sum z_j,\ c_2(E)=\sum_{j<k}z_jz_k,\ \cdots\Big)$$

と分解したとき，Chern 指標 $ch(E)$ は

$$ch(E)=\sum_{j=1}^{r}e^{z_j}$$

と書けることを示せ.

問題 4.2　(i)　前問のように，$c(E)=\prod(1+z_j)$ と分解したとき，$\wedge^k E$ の Chern 指標は

$$ch(\wedge^k E)=\sum_{j_1<\cdots<j_k}e^{z_{j_1}+\cdots+z_{j_k}}\ \Big(=\sum\exp(z_{j_1}+\cdots+z_{j_k})\Big)$$

によって与えられる.

(ii) したがって

$$ch\left(\sum_{k=0}^{r}(-1)^k \wedge^k E\right) = \prod_{j=1}^{r}(1-e^{z_j})$$

となる.

§5. Pontrjagin 類

この節では，E は M 上の実ベクトル束とする．E の接続 ∇ を一つとり，その曲率を R とする．(2.3) と同様に

(5.1) $$\det\left(\lambda I - \frac{R}{2\pi}\right) = \lambda^r + q_1(E,\nabla)\lambda^{r-1} + q_2(E,\nabla)\lambda^{r-2} + \cdots + q_r(E,\nabla)$$

と展開する．$q_j(E,\nabla)$ が M 上の閉じた $2j$ 次微分形式で，そのコホモロジー類が接続 ∇ に依存しないことは §2 の Chern 類の場合と同様に確かめられる．(以下にみるようにこの事実は Chern 類の場合に帰することもできる.)

まず，k が奇数の場合，$q_k(E,\nabla)$ の定めるコホモロジー類は常に 0 になることを証明する．そのために，E に内積 g をとり (2 章 §3 参照)，g を保つ接続 ∇ を考える．そのとき曲率は歪対称 (2 章の (3.2) 参照) である．この場合には，$q_k(E,\nabla)$ そのものが 0 になることを証明する．

$$\det\left(\lambda I - \frac{R}{2\pi}\right) = \det{}^t\left(\lambda I - \frac{R}{2\pi}\right) = \det\left(\lambda I + \frac{R}{2\pi}\right)$$

の両辺を展開すると，

$$\sum q_k(E,\nabla)\,\lambda^{r-k} = \sum (-1)^k q_k(E,\nabla)\,\lambda^{r-k}$$

となるから

(5.2) $$q_{2j-1}(E,\nabla) = 0$$

を得る．

したがって，我々は $q_{2j}(E,\nabla)$ だけを考える．

(5.3) $$p_j(E,\nabla) = q_{2j}(E,\nabla)$$

とおいて，これを **第 j Pontrjagin 形式** (j-th Pontrjagin form)，その定義

するコホモロジー類 $p_j(E)$ を**第 j Pontrjagin 類** (j-th Pontrjagin class) と呼ぶ.

実ベクトル束 E の複素化 $E^C = E \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ の Chern 類を考える. E の接続 ∇ を E^C に自然に拡張し, 同じ記号 ∇ を使うことにする. そのとき,

$$p_j(E, \nabla) = (-1)^j c_{2j}(E^C, \nabla) \tag{5.4}$$

なる関係がある. これは Chern 類の定義 (2.3) と (5.1) を比べるとき, 次の初等代数的結果にほかならないことがわかる.

$$\det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi i} X\right) = \sum c_j(X) \lambda^{r-j}, \qquad X \in \mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{C}),$$

$$\det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi} X\right) = \sum q_j(X) \lambda^{r-j}, \qquad X \in \mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{R})$$

と多項式 c_j, q_j を定義すれば

$$q_{2j}(X) = (-1)^j c_{2j}(X), \qquad X \in \mathfrak{gl}(r\,;\boldsymbol{R}) \tag{5.5}$$

となる. (5.4) によれば $p_j(E)$ は $H^{4j}(M\,;\boldsymbol{Z})$ (正確には, $H^{4j}(M\,;\boldsymbol{Z}) \to H^{4j}(M\,;\boldsymbol{R})$ の像) に属する.

また, (2.20) に相当する Pontrjagin 形式に対する式は

$$p_k(E, \nabla) = \frac{1}{(2\pi)^{2k}(2k)!} \sum \delta_{i_1 \cdots i_{2k}}{}^{j_1 \cdots j_{2k}} \Omega_{j_1}{}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{j_{2k}}{}^{i_{2k}} \tag{5.6}$$

で与えられることに注意しておく. 特に

$$p_1(E, \nabla) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum \Omega_j{}^i \wedge \Omega_i{}^j = \frac{1}{4\pi^2} \sum \Omega_j{}^i \wedge \Omega_j{}^i \tag{5.7}$$

である.

Pontrjagin 類を考えるとき, **Pontrjagin 指標** (Pontrjagin character) なるものも同時に考えておくと便利である. Chern 指標の場合と同じように

$$\begin{aligned} \tilde{p}(E, \nabla) &= \operatorname{tr}\left(\exp\left(\frac{-R}{2\pi}\right)\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(I - \frac{R}{2\pi} + \frac{R^2}{2!\,(2\pi)^2} - \frac{R^3}{3!\,(2\pi)^3} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{5.8}$$

と定義する. E の内積 g を保つ接続 ∇ を使えば (5.2) と同様にして

$$\operatorname{tr}(R^{2j-1}) = 0 \tag{5.9}$$

であるから

$$(5.10)\qquad \tilde{p}_k(E,\nabla) = \frac{1}{(2k)!\,(2\pi)^{2k}}\operatorname{tr}(R^{2k})$$

$$= \frac{1}{(2k)!\,(2\pi)^{2k}}\sum \Omega_{i_2}{}^{i_1}\wedge\Omega_{i_3}{}^{i_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_1}{}^{i_{2k-1}}$$

のみを考えればよい．

$\tilde{p}_k(E,\nabla)$ が $p_1(E,\nabla)$，$p_2(E,\nabla),\cdots$ の多項式として表わされ，逆に $p_k(E,\nabla)$ が $\tilde{p}_1(E,\nabla)$，$\tilde{p}_2(E,\nabla),\cdots$ の多項式として書けることは Chern 類の場合と同様である．

さて，リーマン多様体 M (すなわち，その接ベクトル束 TM) の Pontrjagin 微分形式は，3 章の (5.23) で定義した Weyl の共形曲率テンソル W によって書き表わされることを示そう．3 章 (5.23) の $W^i{}_{jkl}$ を使い

$$(5.11)\qquad W = \frac{1}{2}\sum W^i{}_{jkl}\,\theta^k\wedge\theta^l\otimes\theta^j\otimes e_i\in A^2(\operatorname{End} TM)$$

とおく．そのとき，

$$(5.12)\qquad \det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}R\right) = \det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}W\right)$$

となる．すなわち，Pontrjagin 形式の定義で曲率 R を共形曲率 W でおきかえても変らないことを証明しよう．それには Pontrjagin 形式 $p_k(E,\nabla)$ の代わりに，Pontrjagin 指標形式 $\tilde{p}_k(E,\nabla)$ に対して確かめれば充分である．したがって，問題は

$$(5.13)\qquad \operatorname{tr}(R^{2k}) = \operatorname{tr}(W^{2k})$$

の証明に帰着する．3 章の (5.23) の右辺の $R^i{}_{jkl}$ 以外の項をまとめて，$T^i{}_{jkl}$ と書く．すなわち，

$$(5.14)\qquad T^i{}_{jkl} = \frac{1}{n-2}(R_{jk}\delta_l{}^i - R_{jl}\delta_k{}^i - R_{ik}\delta_l{}^j + R_{il}\delta_k{}^j)$$

$$+\frac{\sigma}{(n-1)(n-2)}(\delta_{jl}\delta_k{}^i - \delta_{jk}\delta_l{}^i)$$

とおく．そうすれば，

(5.15) $$\sum W^i{}_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l=\sum R^i{}_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l+\sum T^i{}_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l$$

であるが，(5.14) から

(5.16) $$\sum T^i{}_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l=\frac{2}{n-2}\sum(R_{jk}\theta^k\wedge\theta^i+R_{ik}\theta^j\wedge\theta^k)+\frac{2\sigma}{(n-1)(n-2)}\theta^i\wedge\theta^j$$

となる．

(5.17) $$\Phi_j{}^i=\frac{1}{2}\sum W^i{}_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l,\quad \Omega_j{}^i=\frac{1}{2}\sum R^i{}_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l,$$
$$\Theta_j{}^i=\frac{1}{2}\sum T^i{}_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l$$

とおくと，まず

(5.18) $$\sum\Theta_j{}^i\wedge\Theta_k{}^j=0$$

が成り立つ．これは (5.16) を使って計算すると，9項のいずれもが次の理由で0になる．(i) θ^j が2回現われる，(ii) R_{jp} は j,p に関して対称だから $\sum R_{jp}\theta^j\wedge\theta^p=0$, (iii) 同様に $\sum_j R_{jp}R_{jq}$ は p,q に関して対称だから $\sum R_{jp}R_{jq}\theta^p\wedge\theta^q=0$.

次に，

(5.19) $$\sum\Theta_j{}^i\wedge\Omega_k{}^j=\frac{1}{2(n-2)}\sum R_{jp}R^j{}_{kqr}\theta^p\wedge\theta^i\wedge\theta^q\wedge\theta^r.$$

右辺の他の項が0になる理由は，Bianchi の恒等式

$$\sum R^j{}_{kqr}\theta^j\wedge\theta^q\wedge\theta^r=-\sum R^k{}_{jqr}\theta^j\wedge\theta^q\wedge\theta^r=0$$

である．ここで，再び Bianchi の恒等式を使って，

$$\sum\Theta_j{}^i\wedge\Omega_i{}^j=0.$$

もっと一般に，(5.19) と Bianchi の恒等式 ($\sum R^l{}_{ist}\theta^i\wedge\theta^s\wedge\theta^t=0$) から，

(5.20) $$\sum\Theta_j{}^i\wedge\Omega_k{}^j\wedge\cdots\wedge\Omega_i{}^l$$
$$=c\sum R_{jp}R^j{}_{kqr}\cdots R^l{}_{ist}\theta^p\wedge\theta^i\wedge\theta^q\wedge\theta^r\wedge\cdots\wedge\theta^s\wedge\theta^t=0$$

を得る．ここで左辺の … のところは Ω でも Θ でもよい．また c は適当な定数である．(5.18) と (5.20) を使うと

$$\sum \Phi_{i_2}{}^{i_1} \wedge \Phi_{i_3}{}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \Phi_{i_1}{}^{i_l}$$
$$= \sum (\Omega_{i_2}{}^{i_1} + \Theta_{i_2}{}^{i_1}) \wedge (\Omega_{i_3}{}^{i_2} + \Theta_{i_3}{}^{i_2}) \wedge \cdots \wedge (\Omega_{i_1}{}^{i_l} + \Theta_{i_1}{}^{i_l})$$

の右辺を展開したときに，$\sum \Omega_{i_2}{}^{i_1} \wedge \Omega_{i_3}{}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_1}{}^{i_l}$ 以外の項はすべて 0 になる．これで (5.12) が証明された．

Pontrjagin 形式がリーマン計量の共形変換で不変なことは，はじめ Chern と Simons によって証明されたが，Weyl の共形曲率で表わされることを証明したのは，A. Avez (Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 66 (1970), 265–268) である．

系として，M が共形的に平坦なリーマン多様体ならば Pontrjagin 類 $p_k(M)$ が 0 になることがわかる．

問題 5.1 P を M 上の主ファイバー束で，構造群を $G = SU(2)$ とする．そのとき，次のような二つのベクトル束を考える．

(1) $G = SU(2)$ は $\boldsymbol{C}^2$ に自然に作用するから，$\boldsymbol{C}^2$ をファイバーとするベクトル束 $E = P \times_G \boldsymbol{C}^2$ が定義される．

(2) Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ に $G = SU(2)$ は随伴表現によって作用するから，$\mathfrak{g}$ をファイバーとするベクトル束 $F = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ が定義される．

F の Pontrjagin 類 $p_1(F)$ を E の Chern 類 $c_2(E)$ で表わせ．

§6. Euler 類

Chern 類，Pontrjagin 類を曲率を使って表わすには，ベクトル束 E の任意の接続を使ってよかった．しかし Euler 類の場合には，まず，E は方向のついた実ベクトル束でファイバーの次元は偶数であると仮定した上で内積を不変にする接続の曲率を使って表わす．

いま E の内積 g を一つえらぶ．E には方向がついていると仮定しているから，E の構造群は $SO(r)$ まで小さくすることができる．E に同伴する主ファイバー束 P として，E についた方向と一致する正規直交の標構の全体をとれ

ば，P の構造群は $SO(r)$ である．

g を保つ E の接続，すなわち P で定義された接続を一つえらび，それを ∇ とする．曲率 R は歪対称である．したがって，正規直交系をなす局所標構に関し，曲率形式 $\Omega=(\Omega_j{}^i)$ は $SO(r)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(r)$ に値をとる 2 次微分形式である．いま $V=\boldsymbol{R}^r$ とし，$\boldsymbol{R}^r$ の自然な内積を使う．そのとき，$\wedge^2 V$ は $\mathfrak{so}(r)$ と同一視される．すなわち，$e_1,\cdots,e_r$ を V の自然な基としたとき，$e_i\wedge e_j$ に対し (i,j) 成分が 1, (j,i) 成分が -1，他の成分は 0 という行列 E_{ij} を対応させる．さて，$r=2m$ とし，$X\in\wedge^2 V$ に対し，$X^m=X\wedge\cdots\wedge X$ (m 回) を考える．これは $\wedge^r V\cong\boldsymbol{R}$ の元であるから，

(6.1) $$X^m=f(X)e_1\wedge\cdots\wedge e_r$$

とおくことにより写像

$$f:\ \wedge^2 V\longrightarrow \boldsymbol{R}$$

を定義する．また f は，$\mathfrak{so}(r)$ 上の m 次の斉次多項式と考えられる．行列式の理論において，$2m$ 次の歪対称な行列 X の行列式 $\det X$ は m 次斉次多項式 $p(X)$ の 2 乗となることが知られている．$p(X)$ は **Pfaffian** と呼ばれるが，(6.1) で定義した f が本質的には Pfaffian である．実際．$f(X)=m!\,p(X)$，すなわち

(6.2) $$f(X)^2=(m!)^2\det(X)\,,\qquad X\in\mathfrak{so}(2m)=\wedge^2 V$$

となる．まず $X=\xi_1 e_1\wedge e_2+\xi_2 e_3\wedge e_4+\cdots+\xi_m e_{2m-1}\wedge e_{2m}$ の形をしている場合，すなわち対応する歪対称行列が

(6.3) $$X=\begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & & & & & \\ -\xi_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \xi_2 & & & \\ & & -\xi_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \xi_m \\ & & & & & -\xi_m & 0 \end{pmatrix}$$

という形をしている場合に確かめる．明らかに

$$(\xi_1 e_1 \wedge e_2 + \cdots + \xi_m e_{2m-1} \wedge e_{2m})^m = m!\,\xi_1 \cdots \xi_m e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2m}$$

$$\det(X) = \xi_1{}^2 \cdots \xi_m{}^2$$

である．一般の場合は，$\wedge^2 V = \mathfrak{so}(2m)$ の任意の元に対し適当な $SO(2m)$ の元 A で変換することにより (6.3) の形にする．すなわち，$A: V \to V$ により $A: \wedge^2 V \to \wedge^2 V$ を引きおこせば，対応する $\mathfrak{so}(2m)$ の変換は $X \to {}^t AXA$ で与えられるから，行列の理論から (6.3) の形にできることはよく知られている.） 一方 $f(X)$ も $\det(X)$ も $SO(2m)$ の元による変換で不変なことは容易にわかる．したがって関係式 (6.2) は任意の X に対して成り立つ．ここで，$\det(X)$ は $O(2m)$ の元によっても不変であるが，$f(X)$ の方は $O(2m)$ の行列式 -1 の元で変換すると符号が変ってしまうことに注意しておく．

さて，$X = \dfrac{1}{2} \sum \xi_{ij} e_i \wedge e_j \in \wedge^2 V$ $(\xi_{ij} = -\xi_{ji})$，対応する行列を

$$X = (\xi_{ij})$$

とすると，

$$f(X) = \sum \varepsilon_{i_1 \cdots i_{2m}} \xi_{i_1 i_2} \cdots \xi_{i_{2m-1} i_{2m}} \tag{6.4}$$

となる．(6.4) は定数倍を無視すれば明らかであるが，係数まで含めて正しいことは X が (6.3) の形をしているときに確かめればよい．

$$e(E, \nabla) = \frac{1}{2^m \pi^m m!} \sum \varepsilon_{i_1 \cdots i_{2m}} \Omega_{i_2}{}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2m}}{}^{i_{2m-1}} \tag{6.5}$$

$$= \frac{1}{2^m \pi^m m!} f(\Omega)$$

は M 上の r 次微分形式で閉じている．そのコホモロジー類は P 内の接続 ∇ のえらび方にはよらない．これらのことは Chern 類の場合と同様に証明される．実際には，$e(E, \nabla)$ の定めるコホモロジー類は，E だけできまり，E から主ファイバー束 P をつくったときに使った内積 g に依存しない．これは，g' をもう一つの内積とし，P' を g' によって定義される主ファイバー束とするとき，P と P' が同型であることからわかる．P から P' への同型写像をつくるには，例えば，P の点を E_x の正規直交基 $(e_1, \cdots, e_r)$ としたとき，それに対し Gram-

Schmidt の直交化の方法で，g' に関する正規直交基 $(e'_1, \cdots, e'_r)$ をつくり，$(e_1, \cdots, e_r)$ に $(e'_1, \cdots, e'_r)$ を対応させればよい．

上に定義した $e(E, \nabla)$ を **Euler 微分形式** (Euler form)，そのコホモロジー類 $e(E)$ を E の **Euler 類** (Euler class) と呼ぶ．$e(E)$ は $H^r(M; \boldsymbol{R})$ $(r = 2m)$ の元である．(実際は，$H^r(M; \boldsymbol{Z})$ の元である．)

問題 6. 1 C^r をファイバーとする複素ベクトル束 E の Chern 類 $c_r(E)$ は E を実ベクトル束とみなしたときの Euler 類 $e(E)$ と一致する．

問題 6. 2 $\boldsymbol{R}^{2m}$ をファイバーとする方向のついた実ベクトル束 E に対し，

$$e(E)^2 = (-1)^m c_{2m}(E \otimes \boldsymbol{C}) = p_m(E).$$

そして，$c(E \otimes \boldsymbol{C}) = \prod_{j=1}^{m} (1 + \xi_j)(1 - \xi_j)$ と形式的に分解し，(必要に応じて ξ_j を $-\xi_j$ でおきかえれば)

$$p_m(E) = (\xi_1 \cdots \xi_m)^2, \qquad e(E) = \xi_1 \cdots \xi_m.$$

§7. 特性類の一般論

Chern 類，Pontrjagin 類，Euler 類を曲率を使って表わしたが，これを統一的にながめてみる．この節の結果は後で必要としないので詳しい証明は与えない．M 上の主 G 束 P の接続は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとる P 上の 1 次微分形式 ω で与えられた．(ω が満たさねばならぬ条件等については 2 章 (5.17) を参照.) その曲率形式 Ω は $\mathfrak{g}$ に値をとる P 上の 2 次微分形式であった．

いま，$\mathfrak{g}$ 上の対称多重線形形式

$$f : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

で G の随伴表現により不変なもの，すなわち

(7.1) $\quad f(aX_1a^{-1}, \ \cdots, \ aX_ka^{-1}) = f(X_1, \cdots, X_k), \qquad a \in G, \ X_i \in \mathfrak{g}$

となる f を考える．偶数次の微分形式は外積の際に可換であるから，$f(\Omega, \cdots \Omega)$ が P 上の $2k$ 次微分形式として定義される．曲率の性質 (2 章の

(5.20) 参照) から，$f(\Omega, \cdots, \Omega)$ は M 上の $2k$ 次微分形式と考えられる．すなわち，M 上に $2k$ 次微分形式 $\varphi_\omega(f)$ が存在して，

$$f(\Omega, \cdots, \Omega) = \pi^* \varphi_\omega(f) \tag{7.2}$$

となる（ここで $\pi : P \to M$ は射影）．$\varphi_\omega(f)$ が閉じた微分形式で，それの定めるコホモロジー類 $\varphi(f) \in H^{2k}(M ; \boldsymbol{R})$ が接続 ω に依存しないことは Chern 類の場合と同様にして確かめられる（詳しい証明は [K–N]，vol. 2 のXII章 §1 を参照されたい）．微分形式 $\varphi_\omega(f)$ を f と ω によって定まる**特性形式** (characteristic form)，$\varphi(f)$ を f によって定まる P の **特性類** (characteristic class) と呼ぶ．

$\mathfrak{g}$ 上の k 次の対称多重線形形式 f に対し $\mathfrak{g}$ 上の k 次の斉次多項式 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(X) = f(X, \cdots, X), \qquad X \in \mathfrak{g} \tag{7.3}$$

で対応させる．f が (7.1) の 意味で G 不変ならば $\tilde{f}$ も同じような意味で G 不変であり，逆も成り立つ．今後，f と $\tilde{f}$ を区別せず f と書くことにする．

例として，$G = GL(r ; \boldsymbol{C})$ または $G = U(r)$ の場合，

$$\det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi i} X\right) = \lambda^r + f_1(X)\lambda^{r-1} + f_2(X)\lambda^{r-2} + \cdots + f_r(X), \qquad X \in \mathfrak{g} \tag{7.4}$$

とすれば $f_1, \cdots, f_r$ は G 不変な斉次多項式で，$\varphi_\omega(f_k)$ は第 k Chern 形式，$\varphi(f_k)$ は第 k Chern 類となる．($G = U(r)$ の場合は，P に同伴する複素ベクトル束 E に内積が与えられている場合にほかならず，P の接続とは，この内積を保つ E の接続にほかならないことを注意しておく．)

同様に $G = GL(r ; \boldsymbol{R})$，または $G = O(r)$ の場合に，

$$\det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi} X\right) = \lambda^r + q_1(X)\lambda^{r-1} + q_2(X)\lambda^{r-2} + \cdots + q_r(X), \qquad X \in \mathfrak{g} \tag{7.5}$$

とすれば，$q_1, \cdots, q_r$ は G 不変な斉次多項式で $\varphi_\omega(q_{2k})$ は第 k Pontrjagin 形式，そのコホモロジー類 $\varphi(q_{2k})$ が第 k Pontrjagin 類である．そして §5 で証明し

たように $G=O(r)$ の場合には $q_{2j-1}\equiv 0$ となる.

さらに, $G=SO(2m)$ の場合には, §6 でつくったように Pfaffian p が G 不変な m 次斉次多項式で, Euler 類は $\dfrac{1}{2^{2m}\pi^m}p$ から得られた.

$\mathfrak{g}$ 上の G 不変な多項式全体のつくる環を $I(G)$ と書くと, $I(GL(r\,;\boldsymbol{C}))$ も $I(U(r))$ も上で定義した $f_1,\cdots,f_r$ で生成され, $I(GL(r\,;\boldsymbol{R}))$ も $I(O(r))$ も上の $q_1,\cdots,q_r$ で生成されるが, $I(SO(m))$ を生成するにはさらに Pfaffian p をつけ加える必要がある.(これらのことについても [K-N], vol. 2 の XII章 §2 を参照.)

一般に G をコンパクトな (連結とは限らない) Lie 群, T をその極大輪環部分群 (maximal torus) とする. 例えば $G=U(r)$ の場合, 対角型の行列のつくる部分群は極大輪環部分群である.

(7.6)
$$N=N_G(T)=\{a\in G\,;\,aTa^{-1}=T\}$$

を G における T の正規化群 (normalizer) とする. 定義により T は N の正規部分群となっている. 商群

(7.7)
$$W=N/T$$

を G の **Weyl 群** と呼ぶ. これは有限群であることが知られている. $G=U(r)$ の場合には, W は r 次の対称群になることは直接に確かめられる.

P を G を構造群とする M 上の主ファイバー束とする. G は P に作用しているから $M=P/G$ と書くこともできる. T も N も G の閉じた部分群であるから, P は T を構造群とする P/T 上の主ファイバー束, 同様に N を構造群とする P/N 上の主ファイバー束とも考えられる. そのとき次のような可換な図式が得られる.

(7.8)
$$\begin{array}{ccccc} I(G) & \xrightarrow{\approx} & I(N) & \xrightarrow{\approx} & I(T)^W \\ \varphi\downarrow & & \varphi\downarrow & & \varphi\downarrow \\ H^*(P/G\,;\,\boldsymbol{R}) & \xrightarrow{\approx} & H^*(P/N\,;\,\boldsymbol{R}) & \xrightarrow{\approx} & H^*(P/T\,;\,\boldsymbol{R})^W \end{array}$$

(水平の矢印はすべて同型写像)

ここで，$I(G)$ は $\mathfrak{g}$ 上の G 不変な多項式の環であった．$I(N)$ も同様に $\mathfrak{n}$ 上の N 不変な多項式の環である．T は可換であるから，T の随伴表現は自明 (trivial) である．したがって，$I(T)$ は $\mathfrak{t}$ 上の多項式の環にほかならない．N，したがって $W=N/T$ が $\mathfrak{t}$ に作用するが，$I(T)^W$ はその作用で不変な多項式の環である．(7.8) において，上の水平の矢印は多項式をそれぞれ $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$ に制限することによって得られる準同型写像である．$I(N)\to I(T)^W$ が同型写像であることは，$\mathfrak{n}=\mathfrak{t}$ であることと $I(T)^W$ の定義から明らか．また，任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対し，適当な $a\in G$ をえらべば $aXa^{-1}\in\mathfrak{t}$ となることから ($G=U(r)$ の場合には，これは任意の歪 Hermite 行列 $X\in \boldsymbol{u}(r)$ は，適当なユニタリ行列 $a\in U(r)$ によって対角化されるということにほかならない)，$I(G)\to I(N)$ が単射である．そして任意の $f'\in I(N)$ に対し

$$(7.9)\qquad f(X)=f'(aXa^{-1}),\qquad X\in\mathfrak{g},\ a\in G,\ aXa^{-1}\in\mathfrak{t}$$

によって $f\in I(G)$ を定義することにより，$I(G)\to I(N)$ が全射であることもわかる．

次に，(7.8) の下の水平矢印であるが，$H^*(P/G;\boldsymbol{R})\to H^*(P/N;\boldsymbol{R})$ が同型写像であることは Leray の結果であり，証明はやさしくない．自然な射影 $P/T\to P/N$ は $W=N/T$ を被覆変換群とする有限被覆である．このことだけから $H^*(P/N;\boldsymbol{R})\to H^*(P/T;\boldsymbol{R})^W$ は同型写像であることがわかる．ただし，ここで $H^*(P/T;\boldsymbol{R})^W$ は W で不変な $H^*(P/T;\boldsymbol{R})$ の元からなる部分環である．(例えば，P/T のコホモロジー類を P/T の微分形式で表わし，W の作用による平均を考えれば明らかであろう．)

図形 (7.8) が可換であることを証明するには，一般に H が G の閉部分群であるときに，図形

$$(7.10)\qquad \begin{array}{ccc} I(G) & \longrightarrow & I(H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(P/G;\boldsymbol{R}) & \longrightarrow & H^*(P/H;\boldsymbol{R}) \end{array}$$

が可換であることを証明すればよい．そのために，P/H 上に G を構造群とす

る主ファイバー束 E を射影 $\mu: P/H \to P/G$ を使い P を引き戻すことにより定義する．すなわち

$$E = \mu^{-1} P,$$

したがって

$$E/G = P/H.$$

図形 (7.10) の可換性を証明するには，(7.10) を次のように

$$(7.11)\qquad \begin{array}{ccc} I(G) & \longrightarrow & I(H) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ H^*(P/G\,;\boldsymbol{R}) & \longrightarrow & H^*(E/G\,;\boldsymbol{R}) = H^*(P/H\,;\boldsymbol{R}) \end{array}$$

二つの三角形に分解して，それぞれの可換性を証明すればよい．左下の三角形は同じ群 G を構造群とする二つの主ファイバー束 E と P の間に束写像 $\tilde{\mu}: E \to P$ が存在する場合であるが，P の接続を $\tilde{\mu}$ を使って E に引き戻せば，三角形の可換性は，微分形式のレベルで成り立つ．(7.11) における右上の三角形は共通の底空間 $E/G = P/H$ 上に，構造群 H の主ファイバー束 P と構造群 G の主ファイバー束 E があり，P が E の部分束となっている場合である．この場合は部分束 P の接続を E に拡張すれば，やはり微分形式のレベルで可換性が成り立つ．

一般にコンパクト Lie 群 G と自然数 n が与えられたとき，G を構造群とする主ファイバー束 E で n 連結 (すなわち，$\pi_i(E) = 0,\ i \leqq n$) なものを G の **n 普遍ファイバー束** (n-universal bundle) と呼ぶ．また，その底空間 B を G の **n 分類空間** (n-classifying space) と呼ぶ．この B 上の主ファイバー束 E は次の性質をもつ．M を n 次元多様体とするとき，M 上の主 G 束の同値類全体の集合は M から B への写像のホモトピー集合 $\pi(M, B)$ と 1 対 1 に対応する (分離定理)．すなわち，M 上の任意の主 G 束 P に対し，写像 $f: M \to B$ が存在して $P = f^{-1}E$ となる．そして，もう一つそのような写像 $g: M \to B$ をとれば，f と g はホモトープである．

例えば，$G=U(r)$ のときには複素 Grassmann 多様体 $U(m+r)/U(m)\times U(r)$ を底空間 B とし，Stiefel 多様体 $U(m+r)/U(m)\times 1$ を全空間 E とする主 $U(r)$ 束が $2m$ 普遍ファイバー束になる．

さて，主 G 束 P が写像 $f:M\to B$ で引きおこされているとき，$H^*(M;\boldsymbol{R})$ の部分環 $f^*(H^*(B;\boldsymbol{R}))$ を P の **特性類環** (characteristic ring) と呼ぶが，これは，写像 $h_p:I(G)\to H^*(M;\boldsymbol{R})$ の像と一致する．これを証明するには，図形

$$
(7.12)\qquad \begin{array}{ccc} & I(G) & \\ {}^{h_E}\swarrow & & \searrow^{h_P} \\ H^*(B;\boldsymbol{R}) & \xrightarrow{f^*} & H^*(M;\boldsymbol{R}) \end{array}
$$

が可換であるから，$H^i(B;\boldsymbol{R})$ $(i\leqq n)$ が h_E の像に含まれることを確かめれば充分である．T を G の極大輪環部分群とすると，E は E/T を底空間とし，T を構造群とする n 普遍ファイバー束である．図形 (7.8) を E に適用することにより，証明は $G=T$ の場合に帰着する．すなわち，$H^i(E/T;\boldsymbol{R})$ $(i\leqq n)$ が写像 $I(T)\to H^*(E/T;\boldsymbol{R})$ に含まれることを示せばよい．$G=T$ の場合には n 普遍ファイバー束として具体的に簡単なものがとれる．$\boldsymbol{C}^{N+1}$ の中の単位球面 S^{2N+1} は複素射影空間 $P_N(\boldsymbol{C})$ 上の主 $U(1)$ 束と考えられる．$r=\dim T$ としたとき，

$$
(7.13)\qquad E'=S^{2N+1}\times\cdots\times S^{2N+1},\qquad B'=P_N(\boldsymbol{C})\times\cdots\times P_N(\boldsymbol{C}),
$$

(r 回の積)

とすれば，E' は B' 上の主ファイバー束で，構造群は $T=U(1)\times\cdots\times U(1)$ である．$\pi_i(S^{2N+1})=0$ $(i\leqq 2N)$ であるから，$2N\geqq n$ にしておけば E' は n 普遍である．さらに，$2N\geqq\dim B$ でもあるようにしておけば分類定理により束写像 $\tilde{f}:E\to E'$ が存在し，$f^*:H^i(B';\boldsymbol{R})\to H^i(B;\boldsymbol{R})$ $(i\leqq n)$ は同型写像となる．したがって，(7.12) を B',B,T に適用することにより，$H^i(B';\boldsymbol{R})$ $(i\leqq n)$ が写像 $I(T)\to H^*(B';\boldsymbol{R})$ の像に含まれることを証明

するという問題に帰着する．(7.13) により，これはさらに簡単な問題になり，$H^i(P_N(\boldsymbol{C})\,;\boldsymbol{R})$ $(i \leqq n)$ が写像 $I(U(1)) \to H^*(P_N(\boldsymbol{C})\,;\boldsymbol{R})$ の像に含まれることを示せば充分である．この場合には，$P_N(\boldsymbol{C})$ 上の主 $U(1)$ 束 S^{2N+1} の第 1 Chern 類 c_1 が $H^*(P_N(\boldsymbol{C})\,;\boldsymbol{R})$ の生成元であることからわかる．

§8. 葉層構造と特性類

n 次元多様体 M の接ベクトル束 TM の部分ベクトル束 E を M 上の **接分布** (distribution) と呼ぶこともある．E のファイバーの次元を r とすると，局所的に（すなわち M の各点 x に対し，その近傍 U で）定義された一次独立なベクトル場 $X_1, \cdots, X_r$ で，E の基底となるものが存在する．もし $[X_i, X_j]$ がすべて E に含まれるならば，分布 E は，**包合的** (involutive) であるという．E が包合的であるかないかは，$X_1, \cdots, X_r$ のえらび方に依存しない．

ベクトル場を使う代わりに微分形式を使い，局所的に一次独立な 1 次微分形式 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-r}$ で E 上で 0 になるものをとる．そのとき，局所的に定義された 1 次微分形式 θ_{ij} $(1 \leqq i,j \leqq n-r)$ が存在して，

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n-r} \theta_{ij} \wedge \omega_j, \qquad i = 1, \cdots, n-r \tag{8.1}$$

が成り立つとき，E は **完全積分可能** (completely integrable) であるという．この性質は，$\omega_1, \cdots, \omega_r$ のえらび方によらない．

外微分 d と Lie 括弧積 $[\ ,\ ]$ の関係

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2}\{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\} \tag{8.2}$$

を使えば，E の完全積分可能性と包合的であることは，同値であることが容易に確かめられる．

Frobenius の定理 は，E が完全積分可能ならば局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$ を適当にとれば，$\omega_1, \cdots, \omega_{n-r}$ は $dx^{r+1}, \cdots, dx^n$ の 1 次結合となると主張する．したが

って，E は $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^r}$ を基底としてもつ．

部分多様体 $V \subset M$ の各点 $x \in V$ で接空間 T_xV が E_x に含まれているとき，**積分多様体** (integral manifold) と呼ぶ．E が完全積分可能ならば，M の各点 x を通って**極大積分多様体** (maximal integral manifold) が一つ，そしてただ一つ存在する．上のようにえらばれた局所座標系を使えば，この極大積分多様体は

$$(8.3)\qquad x^{r+1} = a_{r+1}, \quad \cdots, \quad x^n = a_n \qquad (a_{r+1}, \cdots, a_n \text{ は定数})$$

によって定義される r 次元部分多様体で，$x^1, \cdots, x^r$ をその局所座標系として使える．M の各点 x を通って，ちょうど一つ極大積分多様体が存在するから，M は，極大積分多様体の直和として書ける．

一般に，多様体 M が r 次元連結多様体 L_α の直和

$$(8.4)\qquad M = \bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha \qquad (L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset,\ \alpha \neq \beta)$$

で，また，M の各点 x の近傍 U 内の局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$ を適当にえらべば，$U \cap L_\alpha$ の各連結成分が

$$(8.5)\qquad x^{r+1} = a_{r+1}, \ \cdots, \ x^n = a_n$$

と表わされるときに $\{L_\alpha ; \alpha \in A\}$ は，M 上に r 次元**葉層構造** (foliation) を与えるといい，各 L_α を**葉** (leaf) と呼ぶ．

E が完全積分可能ならば，その極大積分多様体を葉とする葉層構造を得る．逆に，M 上に r 次元葉層構造が与えられたとき，M の各点 x で，その点を通る葉 L_α に接するベクトルを考えることにより，T_xM の r 次元部分空間 E_x を得るが，部分束 $E = \bigcup E_x$ が完全積分可能であることは定義から明らかであろう．したがって，葉層構造 $\{L_\alpha\}$ と完全積分可能な分布 $E \subset TM$ は同値の概念である．前者は後者を積分したものに過ぎない．

簡単な例を挙げよう．

例 1　M 上で零点を持たないベクトル場 X は 1 次元の分布 $E \subset TM$ を定義するが，$[X, X] = 0$ であるから完全積分可能なことは当然で，点 x を通る

軌道 $(\exp tX)x$ が x を通る葉である.

例 2 G を Lie 群, $H \subset G$ を連結 Lie 部分群とするとき, 左剰余類 (left coset) $\{gH\}$ の和として G を書けば, G 上に葉層構造が得られる. H は閉じている必要はない. 例えば, トーラス上には稠密な1次元部分群があるが, そのような群でもよい.

以上の例からわかるように, 点 x を通る葉 L_α が x の近くに限りなく戻ってくることもあり得るので, 葉層構造の定義において「$U \cap L_\alpha$ の各連結成分が」といったのである. $U \cap L_\alpha$ は無限に多くの連結成分に分かれることもある.

例 3 P を M 上の主ファイバー束で, ω を P 上で定義された接続形式とする. ω は構造群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をもつ1次微分形式である. $H_u = \{X \in T_uP\,;\, \omega(X) = 0\}$ によって P 上に **水平接分布** (horizontal distribution) を定義する. 2章 §6 で説明したように, 水平接分布が完全積分可能であるための必要十分条件は接続 ω の曲率が0になることである. そのとき $u \in P$ を含む葉は, u から平行移動によって得られる P の点全体の集合である.

上の例のように, 曲率0の接続をもつ主ファイバー束 P に同伴するファイバー束にも完全積分可能な水平接分布が与えられ, それに対応して葉構造が得られることを説明しよう.

例 4 P を M 上の主ファイバー束で, その構造群 G は離散 (discrete) であると仮定する. 多様体 F の上に G が作用しているとき, F をファイバーとするファイバー束 $E = P \times_G F$ が得られる. G の位相が離散であるから, E の変換関数 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ はいずれも定値写像である. したがって, $\pi^{-1}U_\alpha \approx U_\alpha \times F$ に $U_\alpha \times \{y\}$ $(y \in F)$ を葉とするような葉構造が入る.

M 上に与えられた接分布 $E \subset TM$ の完全積分可能性をアフィン接続の言葉で表わすことができる.

(8.6) **定理** 接分布 $E \subset TM$ が完全積分可能であるための必要十分条件は，ねじれ率0で E を保つアフィン接続が存在することである.

証明 E を完全積分可能とする. M の各点に対し，近傍 U と座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ が存在して， $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^r}$ が E の基となる. ∇ を $(x^1, \cdots, x^n)$ に関して平坦な U のアフィン接続とする. すなわち， $\nabla\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする. そのような接続はねじれ率も曲率も0である. M を局所有限な座標近傍 $\{U_\alpha\}$ で覆い，各 U_α 上に上記のような平坦なアフィン接続 ∇^α をつくる. $\{\rho_\alpha\}$ を $\{U_\alpha\}$ に対する1の分解とし， $\nabla = \sum \rho_\alpha \nabla^\alpha$ によって M のアフィン接続を定義する. ∇^α のねじれ率が0であることから ∇ のねじれ率も0であることは容易に確かめられる. また， ∇^α が E を保つ (すなわち， E の切断 ξ に対し， $\nabla^\alpha \xi$ は E に値をもつ1次微分形式である) ことから ∇ も E を保つことが容易に証明できる.

逆に， E を保つねじれ率0の接続 ∇ が与えられているとする. 任意のベクトル場 X, Y に対し

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

特に X, Y が E に属するとすれば，左辺は E に属する. したがって $[X, Y]$ も E に属するから， E が完全積分可能であることがわかる.

次に E が完全積分可能であるための必要条件として **Bott の消滅定理**を証明する.

(8.7) **定理** 接分布 $E \subset TM$ が完全積分可能であるならば，商ベクトル束 $Q = TM/E$ の Pontrjagin 類 $p_j(Q)$ は $2j > n - r$ の範囲で $p_j(Q) = 0$ となる.

証明 $e_1, \cdots, e_n$ を M の局所標構で， $e_1, \cdots, e_r$ が E に属するとする. ∇ をねじれ率0で E を保つアフィン接続とする. 接続形式 $\omega = (\omega_j{}^i)$ を

$$\nabla e_j = \sum \omega_j{}^i e_i$$

によって定義する. ∇ が E を保つから， ω は

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_\beta{}^\alpha & \omega_\mu{}^\alpha \\ 0 & \omega_\mu{}^\lambda \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

の形をしている．一方，ねじれ率0であるから

$$d\theta^\alpha = -\sum_{j=1}^{n} \omega_j{}^\alpha \wedge \theta^j, \qquad \alpha = 1, \cdots, r, \tag{8.9}$$

$$d\theta^\lambda = -\sum_{\mu=r+1}^{n} \omega_\mu{}^\lambda \wedge \theta^\mu, \qquad \lambda = r+1, \cdots, n.$$

接続 ∇ の曲率形式 $\Omega = (\Omega_j{}^i)$ は

$$\Omega_j{}^i = d\omega_j{}^i + \sum_{k=1}^{n} \omega_k{}^i \wedge \omega_j{}^k, \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

で与えられる．特に，

$$\Omega_\mu{}^\lambda = d\omega_\mu{}^\lambda + \sum_{\nu=r+1}^{n} \omega_\nu{}^\lambda \wedge \omega_\mu{}^\nu \tag{8.10}$$

である．∇ が $Q = TM/E$ に引きおこす接続 ∇' の接続形式は $(\omega_\mu{}^\lambda)$ によって与えられるから，(8.10) によれば，∇' の曲率形式は $(\Omega_\mu{}^\lambda)$ で与えられる．(8.9) の外微分を計算すると

$$0 = dd\theta^\lambda = -\sum_\mu \left(d\omega_\mu{}^\lambda + \sum_\nu \omega_\nu{}^\lambda \wedge \omega_\mu{}^\nu\right) \wedge \theta^\mu \tag{8.11}$$
$$= -\sum_{\mu=r+1}^{n} \Omega_\mu{}^\lambda \wedge \theta^\mu.$$

したがって，$\Omega_\mu{}^\lambda$ を $\theta^i \wedge \theta^j$ の1次結合として表わすと，$\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ $(\alpha, \beta = 1, \cdots, r)$ の項は現われない．すなわち，どの項も θ^ν $(\nu = r+1, \cdots, n)$ を含んでいる．ということは，Pontrjagin 形式 $p_k(Q, \nabla')$ のように，$\Omega_\mu{}^\lambda$ について k 次の斉次多項式は，$2k > n-r$ ならば各項に同じ θ^ν が二回現われるので0になる．したがって，

$$p_k(Q) = 0, \qquad 2k > n-r.$$

$Q = TM/E$ の二つの接続を考える．一つは (8.7) の証明に使った ∇'，もう一つは Q にえらんだ内積 g を保つ接続 ∇''．一方，(7.5) のように $X \in \mathfrak{gl}(n-r; \boldsymbol{R})$ に対し

$$\det\left(\lambda I - \frac{X}{2\pi}\right) = \lambda^{n-r} + q_1(X)\lambda^{n-r-1} + \cdots + q_{n-r}(X)$$

と展開して $q_k(X)$ を定義する．∇' の曲率を R'，∇'' の曲率を R'' とすると，

$q_k(Q,\nabla')=q_k(R')$ も $q_k(Q,\nabla'')=q_k(R'')$ も M 上の $2k$ 次の閉微分形式で，その差は適当な $2k-1$ 次微分形式 $r_k(Q,\nabla',\nabla'')$ を使って

(8.12) $$q_k(Q,\nabla')-q_k(Q,\nabla'')=dr_k(Q,\nabla',\nabla'')$$

と書ける．大切なのは，そのとき $r_k(Q,\nabla',\nabla'')$ として具体的に与えられ自然にきまる微分形式をえらべるという点である．(Chern 類の場合の (2.16) の φ と同様の式で与えられる.) k が奇数ならば (5.2) により $q_k(Q,\nabla'')=0$ である．さらに $k>n-r$ ならば，(8.7) の証明からわかるように $q_k(Q,\nabla')=0$ である．よって，$k=2j+1$ とおけば (8.12) から

(8.13) $$dr_{2j+1}(Q,\nabla',\nabla'')=0,\qquad 2j+1>n-r$$

を得る．すなわち，$r_{2j+1}(Q,\nabla',\nabla'')$ は $4j+1$ 次の閉微分形式である．

(8.14) **定理** $2j+1>n-r$ のとき，$r_{2j+1}(Q,\nabla',\nabla'')$ が代表する $H^{4j+1}(M;\boldsymbol{R})$ の元は ∇',g,∇'' のえらび方に依存せず葉層構造（すなわち完全積分可能な接分布）E だけできまる．

この定理の証明や葉層構造と特性類の関係について詳しいことは Springer Lecture Notes 279 中の R. Bott の論文，Lectures on characteristic classes and foliations，および H.V. Pittie の本，Characteristic Classes of Foliations, Pitman Pub. (1976) を参照されたい．

5

Yang-Millsの接続

前章までは主に一つのファイバー束の一つの接続の性質を調べてきた．この章では一つの主ファイバー束で定義される接続全体のつくる空間を考える．そして，その空間上に Yang-Mills 汎関数と呼ばれる関数を定義しその変分問題を考える．第一変分を計算し，Yang-Mills 汎関数の臨界点として得られる接続，すなわち Yang-Mills 接続を調べるのがこの章の目的である．§5 では第二変分を求め Yang-Mills 接続の安定性を考えるが，底空間が 4 次元かそれ以下の場合と，5 次元かそれ以上の場合で本質的な違いがでてくることを発見する．

§1.　接続の集合

M を n 次元多様体，E をその上のベクトル束でファイバーは $\boldsymbol{R}^r$ とする．いままでは，主に一つの接続の性質か二つの接続の間の関係を調べてきたが，ここでは，E の接続全体 $\mathscr{C}=\mathscr{C}(E)$ を考える．まず，$\mathscr{C}$ が（無限次元の）アフィン空間になることを示す．いま，接続 ∇_0 と ∇_1 が与えられたとき，任意の実数（$-\infty<t<\infty$）に対し

$$(1.1)\qquad \nabla_t = t\nabla_1 + (1-t)\nabla_0$$

も接続になる．これは共変微分 ∇_t に対して Leibniz の公式 (2 章の (1.2)) が成り立つことを確かめればよい．一般に $\nabla_1, \cdots, \nabla_k$ が E の接続なら $t_1+\cdots+t_k=1$ なる実数 $t_1, \cdots, t_k$ に対し

$$t_1\nabla_1+\cdots+t_k\nabla_k$$

も E の接続になる．このことから $\mathscr{C}$ がアフィン空間になることはすぐわかるが，もう少し具体的に説明しよう．

いま，一つの接続 $\nabla_0\in\mathscr{C}$ を固定する．任意の接続 $\nabla\in\mathscr{C}$ に対し

$$(1.2)\qquad \alpha=\nabla-\nabla_0 \qquad (\alpha : A^0(E)\to A^1(E))$$

を考える．明らかに

$$(1.3)\qquad \alpha(\xi_1+\xi_2)=\alpha(\xi_1)+\alpha(\xi_2), \qquad \xi_1, \xi_2\in A^0(E),$$

$$(1.4)\qquad \alpha(f\xi)=f\cdot\alpha(\xi), \qquad f\in A^0,\ \xi\in A^0(E)$$

を得る（(1.4) は ∇_0 と ∇ の Leibniz の公式の結果である）．これは α が $\mathrm{End}\,E$ に値をとる 1 次微分形式

$$(1.5)\qquad \alpha\in A^1(\mathrm{End}\,E)$$

であることを示している．すなわち (1.4) により，$\alpha(\xi)$ の $x\in M$ での値は ξ の x での値で定まる (2 章の問題 1.1 と問題 1.2 を参照)．逆に，任意の $\alpha\in A^1(\mathrm{End}\,E)$ に対し，$\nabla_0+\alpha$ は接続になる．したがって，∇_0 を $\mathscr{C}$ の原点として，$\mathscr{C}$ は $A^1(\mathrm{End}\,E)$ と同一視される．すなわち，$\mathscr{C}$ はアフィン空間であ

って，$\nabla_0 \in \mathscr{C}$ を一つえらべば，それを原点として，$\mathscr{C}$ はベクトル空間 $A^1(\mathrm{End}\, E)$ とみなせるのである．

ベクトル束 E に内積 h が与えられていて，h を保つ (すなわち h を平行にする) 接続だけを考え，そのような接続の全体を $\mathscr{C}(E,h)$ と書くことにする．そのとき，$\mathscr{C}(E,h)$ は $\mathscr{C}(E)$ のアフィン部分空間になる．一つの $\nabla_0 \in \mathscr{C}(E,h)$ を固定すると，任意の $\nabla \in \mathscr{C}(E,h)$ に対し，$\alpha = \nabla - \nabla_0$ は，もちろん $A^1(\mathrm{End}\, E)$ の元であるが，さらに

$$\alpha(h) = \nabla h - \nabla_0 h = 0 \tag{1.6}$$

を満たす．ただし，この式は次のように理解すべきである．$\xi, \eta \in A^0(E)$ とするとき，$\nabla h = \nabla_0 h = 0$ だから

$$0 = (\nabla h)(\xi,\eta) = d(h(\xi,\eta)) - h(\nabla\xi,\eta) - h(\xi,\nabla\eta),$$
$$0 = (\nabla_0 h)(\xi,\eta) = d(h(\xi,\eta)) - h(\nabla_0\xi,\eta) - h(\xi,\nabla_0\eta).$$

この二式の差をとり

$$0 = h(\alpha\xi,\eta) + h(\xi,\alpha\eta) \tag{1.7}$$

を得るが，これが (1.6) の意味するところである．

式 (1.7) は自己準同型写像として，α が h に関して歪対称であることを主張している．いま，各点 $x \in M$ で

$$\begin{aligned}(1.8)\qquad &\mathrm{End}(E,h)_x \\ &= \{A \in \mathrm{End}(E_x)\,;\, h(A\xi,\eta) + h(\xi,A\eta) = 0,\ \ \forall \xi,\eta \in E_x\}\end{aligned}$$

と定義する．$\mathrm{End}(E,h)_x$ を x におけるファイバーするベクトル束を $\mathrm{End}(E,h)$ と書く．

$$\mathrm{End}(E,h) = \bigcup_x \mathrm{End}(E,h)_x. \tag{1.9}$$

これは，$\mathrm{End}\, E$ の部分ベクトル束である．(1.7) は

$$\alpha \in A^1(\mathrm{End}(E,h)) \tag{1.10}$$

ということである．したがって，$\mathscr{C}(E,h)$ は $\nabla_0 \in \mathscr{C}(E,h)$ を一つえらび，原点とするとベクトル空間 $A^1(\mathrm{End}(E,h))$ と同一視される．

以上のことを主ファイバー束 P の場合に拡張する．いま，G を Lie 群，その Lie 環を $\mathfrak{g}$，そして P を構造群 G の主ファイバー束とする．P の接続全体を $\mathscr{C}=\mathscr{C}(P)$ と書く．P の接続は $\mathfrak{g}$ に値をもつ P 上の 1 次微分形式 ω で，条件

(1.11) $$R_a{}^*\omega=a^{-1}\omega a\,,\qquad a\in G,$$

(1.12) $$\omega(A^*)=A\,,\qquad A\in\mathfrak{g}$$

を満たすもので与えられる（2 章 (5.17) 参照）．P 上に二つの接続形式 ω_0, ω_1 が与えられたとき，任意の実数 t に対し，$(1-t)\omega_1+t\omega_0$ もまた接続形式になる．ベクトル束の場合と同様に，$\mathscr{C}$ はアフィン空間になる．いま，一つ $\omega_0\in\mathscr{C}$ を固定し，任意の $\omega\in\mathscr{C}$ に対し

(1.13) $$\alpha=\omega-\omega_0$$

とおくと，α は $\mathfrak{g}$ 値の 1 次微分形式であるが，ω_0 も ω も (1.11) と (1.12) を満たすから，α は条件

(1.14) $$R_a{}^*\alpha=a^{-1}\alpha a\,,\qquad a\in G\,,$$

(1.15) $$\alpha(A^*)=0\,,\qquad A\in\mathfrak{g}$$

を満たす．逆に，α が $\mathfrak{g}$ に値をとる P 上の 1 次微分形式で (1.14) と (1.15) を満たすならば，$\omega_0+\alpha$ は接続形式になる．一方，(1.14) と (1.15) を満たす α の全体は明らかにベクトル空間となるから，$\mathscr{C}$ はアフィン空間である．

(1.14) と (1.15) を満たす α の空間を適当なベクトル束の切断の全体として表わしてみる．$\mathfrak{g}$ をファイバーとする M 上のベクトル束 $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ を 2 章の §5 で定義した．すなわち，

(1.16) $$P\times_{Ad}\mathfrak{g}=(P\times\mathfrak{g})/G\,.$$

念のため，もう一度この定義を説明する．G は P に右から作用し，$\mathfrak{g}$ には随伴表現で作用しているから $P\times\mathfrak{g}$ には

(1.17) $$a:(u,A)\longrightarrow(ua,a^{-1}Aa),\qquad a\in G,\ u\in P,\ A\in\mathfrak{g}$$

で作用する．$(P\times\mathfrak{g})/G$ はこの G の作用による商空間である．すなわち，随伴表現によって P に同伴するベクトル束である．

P がベクトル束 E に同伴する主 $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ 束である場合には

$$P\times_{Ad}\mathfrak{g}=\mathrm{End}\,E \tag{1.18}$$

となる．また E に内積 h が与えられた場合，Q を (E,h) に同伴する主 $O(r)$ 束とすると

$$Q\times_{Ad}\mathfrak{g}=\mathrm{End}(E,h) \tag{1.19}$$

となる．

再び，一般の主 G 束 P の場合に戻る．そのとき，(1.14) と (1.15) を満たす α は，ベクトル束 $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ に値をとる M 上の 1 次微分形式と考えられる．実際，任意の $X\in T_xM$ に対し，$u\in P$ と $X'\in T_uP$ を $\pi(u)=x$, $\pi X'=X$ となるようにえらび

$$\tilde{\alpha}(X)=[(u,\alpha(X'))]\in P\times_{Ad}\mathfrak{g} \tag{1.20}$$

とおく．u を固定すれば，(1.15) により $\alpha(X')$ は X' のえらび方によらない．$u\in P$ を $R_a u=ua\in P$ に変え，$X'\in T_uP$ を $R_aX'=X'\cdot a$ に変えたとき，(1.14) により $(u,\alpha(X'))\in P\times\mathfrak{g}$ は $(ua,\ a^{-1}\cdot\alpha(X')\cdot a)\in P\times\mathfrak{g}$ に変わるが，$(u,\alpha(X'))$ によって代表される元 $[(u,\alpha(X')]\in P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ は変わらない．したがって，$\tilde{\alpha}(X)$ は u, X' のえらび方によらないから，$\tilde{\alpha}$ は $A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ の元として定義される．接続形式 $\omega_0\in\mathscr{C}=\mathscr{C}(P)$ を一つえらべば，$\mathscr{C}$ をベクトル空間 $A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ と同一視できることがわかった．

§2. ゲージ変換群

簡単のため，M 上のベクトル束 E の場合からはじめる．C^∞ の同相写像 φ：$E\to E$ が，ファイバー E_x を E_x にベクトル空間の同型写像として移すとき，E の **ゲージ変換** (gauge transformation) であるという．定義により，φ は M に恒等変換を引きおこす．E のゲージ変換全体のつくる群を $\mathscr{G}(E)$ と書くことにする．

ベクトル束 E に同伴する主 $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ 束 P に $\mathscr{G}(E)$ は次のように作用する．定義により $u\in P$ は同型写像

$$u:\boldsymbol{R}^r\longrightarrow E_x$$

として与えられるから，$\varphi\in\mathscr{G}(E)$ に対し

$$\varphi\circ u:\boldsymbol{R}^r\longrightarrow E_x\longrightarrow E_x$$

も P の元である．したがって

$$\varphi(u)=\varphi\circ u \tag{2.1}$$

と定義すれば，φ は P の C^∞ 同相写像で，任意の $a\in GL(r\,;\boldsymbol{R})$ に対し

$$\varphi(u\cdot a)=\varphi\circ(u\circ a)=(\varphi\circ u)\circ a=\varphi(u)\cdot a$$

となる．すなわち，φ は $GL(r\,;\boldsymbol{R})$ の作用と可換である． 逆に P の変換 φ が条件

$$\varphi(ua)=\varphi(u)\cdot a\,,\qquad u\in P,\ a\in GL(r\,;\boldsymbol{R}) \tag{2.2}$$

を満たすなら，φ はゲージ変換群 $\mathscr{G}(E)$ の元に対応する．実際，$x\in M$ に対し $\pi(u)=x$ なる $u\in P$ をえらび，同型写像

$$\varphi(u)\circ u^{-1}:E_x\longrightarrow\boldsymbol{R}^r\longrightarrow E_x$$

を考えると，(2.2) から $\varphi(u)\circ u^{-1}$ は u のえらび方によらない．すなわち，

$$\varphi(ua)\circ(ua)^{-1}=\varphi(u)\circ a\circ a^{-1}\circ u^{-1}=\varphi(u)\circ u^{-1}\,.$$

次に，ベクトル束 E に内積 h が与えられているときは，$\mathscr{G}(E)$ の元 φ で h を保つものだけからなる部分群を考えるのが自然である． これを (E,h) のゲージ変換群と呼び $\mathscr{G}(E,h)$ と書く． この場合には (E,h) に同伴する主 $O(r)$ 束 Q の変換 φ で

$$\varphi(ua)=\varphi(u)a\,,\qquad u\in Q,\ a\in O(r) \tag{2.3}$$

となるものと $\mathscr{G}(E,h)$ の元の間に自然な対応がつく．

したがって一般に G を構造群とする主ファイバー束 P に対して

$$\varphi(ua)=\varphi(u)a,\qquad u\in P,\ a\in G \tag{2.4}$$

となるような P の変換 φ を P の **ゲージ変換**，そして，ゲージ変換全体のつく

る群を **ゲージ変換群** (group of gauge transformations) と呼び，$\mathscr{G}=\mathscr{G}(P)$ と書くことにする．(構造群 G を物理学者はゲージ群 (gauge group) と呼ぶ．ゲージ変換群は数学者の立場からは P の自己同型群 (automorphism group) とでも呼ぶべきであろうが，物理の言葉を借用することにする．)

前節で Lie 環 $\mathfrak{g}$ をファイバーとするベクトル束 $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ を考えたが，それに対応して G をファイバーとするファイバー束 $P\times_{Ad}G$ を定義する．$P\times G$ に $b\in G$ を

$$b:(u,a)\longmapsto(ub,b^{-1}ab)\,,\qquad u\in P,\ a\in G \tag{2.5}$$

で作用させ，商空間

$$P\times_{Ad}G=(P\times G)/G \tag{2.6}$$

を定義する．これは G を G 自身に随伴表現

$$b:a\longmapsto(Ad\,b)a=bab^{-1} \tag{2.7}$$

によって作用させ，P からつくった同伴束である．$(u,a)\in P\times G$ で代表される $P\times_{Ad}G$ の元は $x=\pi(u)$ における P のファイバー $P_x=\pi^{-1}(x)$ の同型写像

$$v\in P_x\longrightarrow u\circ a\circ u^{-1}\circ v\in P_x \tag{2.8}$$

を与える．(ここで $u^{-1}\circ v\in G$ の意味を説明しておく．$u^{-1}\circ v$ は，$v=ub$ によって定まる G の元 b を表わしていると思ってもよい．あるいは，$u\in P_x$ を $b\in G\longrightarrow ub\in P_x$ なる写像と考え，同様に v も写像 $G\to P_x$ と考えたときの合成写像 $u^{-1}\circ v:G\to P_x\to G$ と考えてもよい．) (u,a) の代わりに $(ub,b^{-1}ab)$ を使えば

$$(ub)\circ(b^{-1}ab)\circ(ub)^{-1}\circ v=u\circ a\circ u^{-1}\circ v$$

となるから，(2.8) は代表 (u,a) のえらび方によらない．

ファイバー束 $P\times_{Ad}G$ の切断 φ は各点 $x\in M$ で，上のように (2.8) により P_x の同型写像 $\varphi(x):P_x\to P_x$ を定義する．したがって φ は P の変換を定義する．(2.8) からこの変換が (2.4) を満たすことは明らかである．このようにして，P のゲージ変換をファイバー束 $P\times_{Ad}G$ の切断としてとらえる

ことができる．ゲージ変換群 $\mathscr{G}(P)=\Gamma(P\times_{Ad}G)$ を無限次元の Lie 群のように考えたとき，その Lie 環は $A^0(P\times_{Ad}\mathfrak{g})=\Gamma(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ で与えられる．例えば，$\xi\in A^0(\mathrm{End}(E,h))$ は各点 $x\in M$ で歪対称な変換 $E_x\to E_x$ を定義するから，$e^{t\xi}$ は直交変換 $E_x\to E_x$ の1助変数群として，ゲージ変換群 $\mathscr{G}(E,h)$ の1助変数部分群となる．一般に，$\exp:\mathfrak{g}\to G$ を M の各点で適用することにより

$$\exp:A^0(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\longrightarrow\mathscr{G}(P)$$

が得られる．

§3.　接続の空間に作用するゲージ変換群

多様体 M 上の主 G 束 P に対し，§1 では P の接続の集合 $\mathscr{C}=\mathscr{C}(P)$ を，そして §2 では P のゲージ変換群 $\mathscr{G}=\mathscr{G}(P)$ を考えた．ここでは $\mathscr{G}$ が $\mathscr{C}$ に自然に作用することを示し，その作用の性質を調べる．

P の接続形式 ω は定義により (1.11), (1.12) を満たす．ゲージ変換 $\varphi\in\mathscr{G}$ に対し，$\varphi^*\omega$ もまた (1.11), (1.12) を満たすことを示そう．ゲージ変換の条件 (2.4) は

$$\varphi\circ R_a=R_a\circ\varphi \tag{3.1}$$

にほかならない．これから (1.11) は次のようにして証明される．

$$R_a{}^*(\varphi^*\omega)=\varphi^*(R_a{}^*\omega)=\varphi^*((Ad\,a^{-1})\omega)=(Ad\,a^{-1})(\varphi^*\omega)\,.$$

次に $A\in\mathfrak{g}$ によって生成される群 e^{tA} に (2.4) を適用して

$$\varphi(u\,e^{tA})=\varphi(u)\,e^{tA}\,.$$

これを，$t=0$ で t について微分して

$$\varphi(A^*)=A^*\,. \tag{3.2}$$

したがって，(1.12) は次のようにして得られる．

$$(\varphi^*\omega)(A^*)=\omega(\varphi A^*)=\omega(A^*)=A\,.$$

接続は P の接ベクトル束 TP を

$$TP = V \oplus H$$

と垂直方向および G で不変な水平方向への分解としても得られた (2章 §6 参照). この定義からも φ が接続を接続に移すことはすぐわかる. $\varphi(V) = V$ は φ が M の点を動かさないことから (あるいは (3.2) からも) 明らか. $\varphi(H)$ が G で不変なことは (3.1) から $R_a(\varphi(H)) = \varphi(R_a(H)) = \varphi(H)$ により明らか.

以上で $\mathscr{G}$ が $\mathscr{C}$ に自然に作用することがわかったが, ベクトル束 E の接続が共変微分で与えられているときに, それがゲージ変換でどのように変わるか調べてみる. E を主 G 束 P に同伴するベクトル束とする. E のゲージ変換 φ と対応する P のゲージ変換 $\tilde{\varphi}$ は

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{u}) = \varphi \circ \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} \in P, \ \ (\boldsymbol{u} : \boldsymbol{R}^r \to E_x)$$

で結ばれている. P の接続形式 ω に対応する E での共変微分を ∇ とし, $\tilde{\varphi}^*\omega$ に対応する共変微分を ∇^φ と書くとき

$$\nabla^\varphi = \varphi^{-1} \circ \nabla \circ \varphi \tag{3.3}$$

となることを証明する. すなわち, 切断 $\xi \in A^0(E)$ に対し, $\nabla^\varphi \xi = \varphi^{-1}(\nabla(\varphi\xi))$ を証明する. ξ に対応する関数 $\tilde{\xi} : P \to \boldsymbol{R}^r$ を考える (2章 (7.3) を参照). そのとき, $\varphi\xi \in A^0(E)$ に対応する関数 $\widetilde{\varphi\xi} : P \to \boldsymbol{R}^r$ は

$$\widetilde{\varphi\xi} = \tilde{\varphi}^{*-1}\tilde{\xi} \tag{3.4}$$

で与えられる. 実際, $\boldsymbol{u} \in P$, $x = \pi(\boldsymbol{u}) \in M$ に対し

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi}^{*-1}\tilde{\xi})(\boldsymbol{u}) &= \tilde{\xi}(\tilde{\varphi}^{-1}\boldsymbol{u}) = \tilde{\xi}(\varphi^{-1} \circ \boldsymbol{u}) \\ &= \boldsymbol{u}^{-1} \circ \varphi(\xi(x)) = \boldsymbol{u}^{-1}(\varphi\xi(x)) = \widetilde{\varphi\xi}(\boldsymbol{u}).\end{aligned}$$

2章の (7.12) によれば, $\nabla^\varphi \xi$ を P の上で計算すると, $\boldsymbol{R}^r$ 値の P 上の1次微分形式

$$d\tilde{\xi} + \tilde{\varphi}^*\omega \wedge \tilde{\xi}$$

で与えられる. これを (3.4) を使って

$$d\tilde{\xi} + \tilde{\varphi}^*\omega \wedge \tilde{\xi} = \tilde{\varphi}^*(d(\tilde{\varphi}^{*-1}\tilde{\xi}) + \omega \wedge \tilde{\varphi}^{*-1}\tilde{\xi}) = \tilde{\varphi}^*(d(\widetilde{\varphi\xi}) + \omega \wedge \widetilde{\varphi\xi})$$

と書き直す．2 章の (7.12) により，$d(\widetilde{\varphi\xi}) + \omega \wedge \widetilde{\varphi\xi}$ は $\nabla(\varphi\xi)$ に対応する P 上の関数である．したがって，再び (3.4) により $\tilde{\varphi}^*(d(\widetilde{\varphi\xi}) + \omega \wedge \widetilde{\varphi\xi})$ は $\varphi^{-1}(\nabla(\varphi\xi))$ に対応する．これで (3.3) が証明された．

以上で $\mathscr{G}$ が $\mathscr{C}$ に自然に作用することがわかった．二つの接続 $\omega, \varphi^*\omega$ の差 $\varphi^*\omega - \omega$ はベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ の切断を与えることを知っている(§1 参照)．これをベクトル束の場合に，まず調べてみる．ゲージ変換 $\varphi : E \to E$ は特に $\mathrm{End}\, E = E \otimes E^*$ の切断であるから，E の接続（共変微分）∇ により $\nabla\varphi \in A^1(\mathrm{End}\, E)$ が定義されることを注意しておいて，$\nabla^\varphi - \nabla$ を計算する．(3.3) より

$$\nabla^\varphi \xi - \nabla\xi = \varphi^{-1}\nabla(\varphi\xi) - \nabla\xi = (\varphi^{-1}\nabla\varphi)\xi - \varphi^{-1}\varphi\nabla\xi - \nabla\xi = (\varphi^{-1}\nabla\varphi)\xi$$

を得る．すなわち

$$\nabla^\varphi - \nabla = \varphi^{-1}\nabla\varphi \in A^1(\mathrm{End}\, E)\,. \tag{3.5}$$

上式から，$\varphi \in \mathscr{G} \subset A^0(\mathrm{End}\, E)$ が ∇ に関して平行であることと ∇ がゲージ変換 φ で不変であることは同値である．

$$\nabla\varphi = 0 \iff \nabla^\varphi = \nabla\,. \tag{3.6}$$

特に φ がスカラー，$\varphi = cI_E$ $(c \neq 0)$，ならば，すべての $\nabla \in \mathscr{C}$ に対し $\nabla^\varphi = \nabla$，すなわち，φ は $\mathscr{C}$ に恒等変換として作用する．$\varphi \neq cI_E$ でないとする．そのとき容易にわかるように $\nabla\varphi \neq 0$ となる接続 ∇ が存在する．したがって，φ の作用は $\mathscr{C}$ の恒等変換ではない．すなわち，$\mathscr{C}$ に恒等変換として働く $\mathscr{G}$ の元は 1 次元の正規部分群 $\{cI_E\,;\, c \neq 0\}$ をつくる．したがって商群 $\mathscr{G}/\{cI_E\,;\, c \neq 0\}$ は $\mathscr{C}$ に効果的に作用する．

さて，G を構造群とする主ファイバー束 P の場合を考える．End E に相当するものは Lie 環 $\mathfrak{g}$ をファイバーとするベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ であり，P の二つの接続の差は $A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ の元であることを §1 で学んだ．

U を M の中の座標近傍とし，P は U 上で直積とする．

$$P|_U = U \times G\,. \tag{3.7}$$

これに対応する局所切断

$$\sigma_U : U \longrightarrow P|_U = U \times G, \qquad x \mapsto (x, e)$$

を考える．ここで e は G の単位元．P 上に接続形式 ω が与えられたとき，U 上の接続形式を

$$\omega_U = \sigma_U{}^* \omega$$

と定義する．座標 $(x, s) \in U \times G$ を使えば，逆に ω_U を使って ω を書くことができる（2章 §5を参照）：

(3.8) $$\omega = s^{-1}\omega_U s + s^{-1} ds\,.$$

P のゲージ変換 φ は，$P|_U = U \times G$ では適当な $f : U \to G$ を使って

(3.9) $$\varphi(x, s) = (x, f(x)\,s), \qquad (x, s) \in U \times G$$

の形に書ける．そのとき，(3.8) と (3.9) から

(3.10) $$\begin{aligned}\varphi^* \omega &= s^{-1} f^{-1} \omega_U f s + s^{-1} f^{-1} (df \cdot s + f \cdot ds)\\ &= s^{-1} f^{-1} \omega_U f s + s^{-1} f^{-1} df \cdot s + s^{-1} ds\,.\end{aligned}$$

したがって

(3.11) $$\varphi^* \omega - \omega = s^{-1} f^{-1} (df + \omega_U f - f \omega_U) s\,.$$

§1で示したように $\alpha = \varphi^* \omega - \omega$ は (1.14)，(1.15) を満たす P 上の $\mathfrak{g}$ 値1次微分形式であり，また $A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ の元と考えられる．U 上で $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ を

(3.12) $$(P \times_{Ad} \mathfrak{g})|_U = U \times \mathfrak{g}$$

と直積に書く．もちろん，(3.12) の同型対応は (3.7) の同型対応から引きおこされたものをとる．すなわち，$(x, A) \in U \times \mathfrak{g}$ に対応する $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ の点は $((x, e), A) \in (U \times G) \times \mathfrak{g}$ で代表されるものである．したがって，(3.11) において $s = e$ とおくことによって得られる U 上の $\mathfrak{g}$ 値1次微分形式

(3.13) $$f^{-1}(df + \omega_U f - f \omega_U)$$

は $\varphi^* \omega - \omega$ に対応する $A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ の元を表わす．これは (3.5) の一般化となっている．

次にゲージ変換で曲率がどのように変わるかを調べる．ベクトル束の場合はわかりやすい．ベクトル束 E の接続は共変外微分

$$D : A^p(E) \longrightarrow A^{p+1}(E)$$

を定義した（2章§2参照）．曲率 $R \in A^2(\mathrm{End}\, E)$ は

$$R = D \circ D : A^0(E) \longrightarrow A^2(E)$$

で与えられた（2章 §2参照）．ゲージ変換 $\varphi : E \to E$ は D を

$$D^{\varphi} = \varphi^{-1} \circ D \circ \varphi$$

に変換する（(3.3) 参照）から，曲率 R を

(3.14)　$$R^{\varphi} = D^{\varphi} \circ D^{\varphi} = \varphi^{-1} \circ D \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ D \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$$

に変換する．すなわち，接続 D^{φ} の曲率 R^{φ} は $\varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ で与えられる．

一般に主ファイバー束 P の接続形式 ω をゲージ変換 φ で $\varphi^*\omega$ に動かしたときには，(3.8)，(3.9) の記号を使えば (3.10) のように

(3.15)　$$\varphi^*\omega = (fs)^{-1}\omega_U(fs) + (fs)^{-1}d(fs)$$

と書ける．ω の曲率形式 $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ は φ により $\varphi^*\Omega = d(\varphi^*\omega) + (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\omega)$ に動く．(3.15) を使って $\varphi^*\Omega$ を計算するとき $t = fs$ とおけば便利である．

$$\begin{aligned}\varphi^*\Omega = & -t^{-1}dt \wedge t^{-1}\omega_U t + t^{-1}d\omega_U t - t^{-1}\omega_U \wedge dt - t^{-1}dt \wedge t^{-1}dt \\ & + (t^{-1}\omega_U t + t^{-1}dt) \wedge (t^{-1}\omega_U t + t^{-1}dt) \\ = & \ t^{-1}(d\omega_U + \omega_U \wedge \omega_U)t\end{aligned}$$

となるから，

$$\Omega_U = d\omega_U + \omega_U \wedge \omega_U$$

とおいて，

(3.16)　$$\varphi^*\Omega = s^{-1}f^{-1}\Omega_U fs$$

を得る．一方，(3.8) から得る式

(3.17)　$$\Omega = s^{-1}\Omega_U s$$

と比較すると，ゲージ変換 φ により Ω_U が $f^{-1}\Omega_U f$ に移ることがわかる．

§4. Yang-Millsの方程式

リーマン多様体 M 上の主 G 束 P を一つ固定する．$\mathscr{C}=\mathscr{C}(P)$ を P の接続の集合とする (§1参照)．Yang-Mills 汎関数とよばれる関数 $J:\mathscr{C}\to \boldsymbol{R}$ を定義し，その臨界点を調べる．以下，M は向きのついたコンパクト・リーマン多様体，構造群 G はコンパクトな Lie 群と仮定する．G がコンパクトなら，Lie 環 $\mathfrak{g}$ に $Ad\,G$ で不変な内積 $(\ ,\ )$ が存在する．すなわち，

(4.1) $$(aXa^{-1},\ aYa^{-1})=(X,Y),\qquad X,Y\in\mathfrak{g},\ a\in G$$

となる内積 (X,Y) が定義される．そのような内積を得るには，$\mathfrak{g}$ 上の任意の内積 $(X,Y)'$ をとり，G 上で次のように平均すればよい．

(4.2) $$(X,Y)=\frac{1}{|G|}\int_G (aXa^{-1},\ aYa^{-1})'\,d\mu(a)\,.$$

ここで μ は G 上の不変測度 (Haar 測度) で $|G|=\int_G 1\cdot d\mu(a)$ は G の体積を表わす．しかし応用上大切な群の場合には，具体的に不変な内積を与えることができる．

(a) $G=O(r)$ (直交群) の場合．

その Lie 環 $\mathfrak{o}(r)$ は r 次の交代行列からなるが，内積を

(4.3) $$(X,Y)=-\operatorname{tr}(XY)=-\sum_{i,j}x_j{}^i y_i{}^j=\sum_{i,j}x_j{}^i y_j{}^i,$$
$$X=(x_j{}^i),\ Y=(y_j{}^i)\in\mathfrak{o}(r)$$

と定義すれば，$a\in O(r)$ に対し

$$(aXa^{-1},aYa^{-1})=-\operatorname{tr}(aXYa^{-1})=-\operatorname{tr}(X,Y)=(X,Y)$$

となり，$Ad\,G$ で不変なことがわかる．

(b) $G=U(r)$ (ユニタリ群) の場合．

その Lie 環 $\mathfrak{u}(r)$ は r 次の歪 Hermite 行列からなり

(4.4) $$(X,Y)=-\operatorname{tr}(XY)=-\sum x_j{}^i y_i{}^j=\sum x_j{}^i \bar{y}_j{}^i,$$
$$X=(x_j{}^i),\ Y=(y_j{}^i)\in\mathfrak{u}(r)$$

によって与えられる内積は $Ad\,G$ で不変である．

Lie 群についてもう少し知識のある読者のために，一般論を述べると，まず，コンパクト半単純 Lie 群 G の場合には

$$(4.5) \qquad (X, Y) = -\operatorname{tr}((ad\,X)\cdot(ad\,Y)), \qquad X, Y \in \mathfrak{g}$$

と定義すればよい．$-(X, Y)$ は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式と呼ばれる．$O(r)$ は半単純（$r \neq 4$ なら単純）で，(4.3) で定義された内積は Killing 形式の定数倍になっている．$U(r)$ は半単純ではない．$\{e^{it}I_r\}$ という 1 次元の中心がある．$SU(r)$ は単純である．Lie 環 $\mathfrak{u}(r)$ は

$$\mathfrak{u}(r) = \mathfrak{su}(r) + \boldsymbol{R}I_r$$

と直和になる．一般に，コンパクト Lie 群 G の Lie 環は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{c}$$

と，半単純なイデアル $\mathfrak{s}$ と中心 $\mathfrak{c}$ の直和になる．$\mathfrak{s}$ の内積は (4.5) のように Killing 形式を使って定義し，$\mathfrak{c}$ の内積は任意のものをとれば，$\mathfrak{s}$ に $Ad\,G$ で不変な内積が得られる．しかし我々は，このような一般論を必要とはしない．(4.3) と (4.4) で与えられる内積で充分である．

さて，P の接続形式 ω とその曲率 Ω を考える．曲率はベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値をとる M 上の 2 次微分形式とも考えられるし，あるいは局所的に P を直積 $P|_U = U \times G$ とみなし，$\mathfrak{g}$ に値をとる U 上の 2 次微分形式とも考えられる．$Ad\,G$ で不変な $\mathfrak{g}$ の内積はベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ の各ファイバーに内積を与える．一方，M のリーマン計量は，M の各点 x で微分形式の空間 $\wedge T_xM$ に内積を与える．したがって，M の各点で曲率の長さ $\|\Omega\|$ を定義することができる．具体的には，U 上 1 次微分形式 $\theta^1, \cdots, \theta^n$ を各点 $x \in U$ で $T_x{}^*M$ の正規直交基になるようにえらび，$\mathfrak{g}$ の正規直交基 $B_1, \cdots, B_r$ をえらべば，Ω は局所的に

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum F^i{}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \otimes B_i$$

と書ける．そのとき

$$(4.6) \qquad \|\Omega\|^2 = \langle \Omega, \Omega \rangle = \sum_{i,\alpha,\beta} |F^i{}_{\alpha\beta}|^2$$

と定義すれば，$\|\Omega\|$ は正規直交基 $\theta^1, \cdots, \theta^n$，および $B_1, \cdots, B_r$ のえらび方に依存しない．リーマン空間 M の体積要素 $*1 = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$ を使って

$$J(\omega) = \frac{1}{2}\int_M \langle \Omega, \Omega \rangle * 1 \tag{4.7}$$

により，**Yang-Millsの汎関数** (Yang-Mills functional) $J : \mathscr{C} \to \boldsymbol{R}$ を定義する．

汎関数 J はゲージ変換群により不変である．すなわち，

$$J(\varphi^*\omega) = J(\omega), \qquad \omega \in \mathscr{C},\ \varphi \in \mathscr{G}. \tag{4.8}$$

実際，φ により曲率 Ω_U は $f^{-1}\Omega_U f$ に移る ((3.16) 参照) が，$\mathfrak{g}$ の内積は変換 $X \mapsto f^{-1}Xf$ で不変だから

$$\langle \varphi^*\Omega, \varphi^*\Omega \rangle = \langle \Omega, \Omega \rangle \tag{4.9}$$

が成り立つ．したがって，(4.8) は積分する前の段階で成り立つ．(4.8) により，J は $\mathscr{C}/\mathscr{G}$ 上の関数と考えられる．

汎関数 J の第一変分を計算し，その臨界点を求める．接続の空間 $\mathscr{C}$ はアフィン空間であるから，変分を求めるにあたり

$$\omega_t = \omega + t\alpha, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon \tag{4.10}$$

の形の直線に沿っての変分を計算すれば充分である．§1 で学んだように α は (1.14) と (1.15) を満たす P 上の 1 次微分形式であるが，$P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値をとる M 上の 1 次微分形式と思ってもよい．接続 ω_t の曲率形式 Ω_t は

$$\Omega_t = d\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t = \Omega + t(d\alpha + \omega \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega) + t^2 \alpha \wedge \alpha$$

となるから，

$$D\alpha = d\alpha + \omega \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega \tag{4.11}$$

とおけば

$$\Omega_t = \Omega + tD\alpha + t^2 \alpha \wedge \alpha \tag{4.12}$$

と書ける．$D\alpha$ は $\alpha \in A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ の共変外微分であることに注意する．

$$J(t) = J(\omega_t) = \frac{1}{2}(\Omega_t, \Omega_t) = \frac{1}{2}\int_M \langle \Omega_t, \Omega_t \rangle * 1$$

とおいて，$J'(0) = \left.\dfrac{d}{dt}J(t)\right|_{t=0}$ を計算する．(4.12) により $\left.\dfrac{d}{dt}\Omega_t\right|_{t=0} = D\alpha$ であるから，

$$J'(0) = (D\alpha, \Omega)\ . \tag{4.13}$$

微分作用素 D の形式的随伴作用素を D^* とする．すなわち，

$$(D\alpha, \Omega) = (\alpha, D^*\Omega)$$

とおくことにより $D^* : A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ が定義されるが，D^* を微分作用素として具体的に書くことも可能である．それは後まわしにして，まず (4.13) を

$$J'(0) = (\alpha, D^*\Omega) \tag{4.14}$$

と書き直してみる．接続 $\omega \in \mathscr{C}$ が J の臨界点であるとは，ω を通るすべての線分 (4.10) に対し $J'(0) = 0$ となる．すなわち，すべての $\alpha \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ に対し，$(\alpha, D^*\Omega) = 0$ となることである．したがって，ω が J の臨界点になる条件は

$$D^*\Omega = 0 \tag{4.15}$$

で与えられる．この式を **Yang–Mills の方程式** (Yang–Mills equation) と呼ぶ．Yang–Mills の方程式を満たす接続を **Yang–Mills の接続** (Yang–Mills connection) と呼ぶ．

一方，任意の接続に対し Bianchi の恒等式

$$D\Omega = 0 \tag{4.16}$$

が常に成立していることを注意しておく．

次に，D^* を微分作用素として具体的に書き表わす． 3 章 §7 において，リーマン多様体で通常の外微分 d の随伴作用素 δ が

$$\delta\eta = (-1)^p *^{-1} d * \eta\ , \qquad \eta \in A^p \tag{4.17}$$

で与えられることを示した．全く同様の公式が D^* に対しても成り立つことを説明しよう． Hodge の $*$ 作用素 $A^p \to A^{n-p}$ は，リーマン多様体上の任意の

ベクトル束Eに値をとる微分形式に対しても

$$*: A^p(E) \longrightarrow A^{n-p}(E)$$

として定義されることは明らかである．次に，Eに内積hと，それを保つ接続∇が与えられていて，共変外微分をDとする．$\xi \in A^{p-1}(E)$，$\eta \in A^p(E)$ に対し，$\langle \xi \wedge *\eta \rangle \in A^{n-1}$ を考える．ここで，$\langle\ \rangle$はhによる内積であることを示している．局所的に $\xi = a\xi'$，$\eta = b\eta'$ $(a, b \in A^0(E)$，$\xi' \in A^{p-1}$，$\eta' \in A^p)$ としたとき，

$$\langle \xi \wedge *\eta \rangle = h(a, b)\xi' \wedge *\eta'$$

の意味である．そのとき

$$0 = \int_M d\langle \xi \wedge *\eta \rangle = \int_M \langle D\xi \wedge *\eta \rangle + (-1)^{p-1}\langle \xi \wedge D*\eta \rangle .$$

したがって

$$\int \langle D\xi \wedge *\eta \rangle = (-1)^p \int \langle \xi \wedge **^{-1} D*\eta \rangle .$$

すなわち，

$$(D\xi, \eta) = (-1)^p (\xi, *^{-1} D*\eta)$$

が成り立つから

$$D^*\eta = (-1)^p *^{-1} D*\eta, \qquad \eta \in A^p(E) \tag{4.18}$$

を得る．

正規直交系をなすEの局所切断$s_1, \cdots, s_r$をとり，ηを

$$\eta = \frac{1}{p!} \sum b^i{}_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \theta^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\alpha_p} s_i \tag{4.19}$$

と局所的に表わしたときには

$$D^*\eta = -\frac{1}{(p-1)!} \sum \nabla_\beta b^i{}_{\beta\alpha_2 \cdots \alpha_p} \theta^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \theta^{\alpha_p} s_i \tag{4.20}$$

と書ける．ここで，∇はEの接続とMの Levi-Civita 接続を合わせてできる，$E \otimes \wedge^p T^*M$における共変微分 $A^0(E \otimes \wedge^p T^*M) \to A^1(E \otimes \wedge^p T^*M)$ を表わしている．(4.20) の証明は3章の (7.25) の場合と同様である．

以上 (4.18) も (4.20) も内積をもった一般のベクトル束Eに対し成立する

ことを説明した．特にベクトル束 $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ に適用される．

次に，Yang-Mills 汎関数 J の第二変分を計算する．J の臨界点，すなわち Yang-Mills 接続形式 ω を一つ固定し，その変分

$$(4.21)\qquad \omega_t=\omega+t\alpha+\frac{1}{2}t^2\beta+\cdots,\qquad \alpha,\beta\in A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$$

を考える．第一変分の場合と同様 $\omega+t\alpha$ の形の変分を考えれば充分であるが，他の応用上，一般の形 (4.21) の場合に計算をしておく．$J''(0)$ の計算には t^2 以上の項は関係ないことを注意しておく．(4.12) と同様にして

$$\Omega_t=\Omega+tD\alpha+t^2D\beta+t^2\alpha\wedge\alpha+\cdots$$

を得る．したがって

$$(\Omega_t,\Omega_t)=(\Omega,\Omega)+2t(D\alpha,\Omega)+2t^2(D\beta,\Omega)+t^2(D\alpha,D\alpha)$$
$$+2t^2(\Omega,\alpha\wedge\alpha)+\cdots$$

となる．いま，ω は Yang-Mills 接続であると仮定しているから，$(D\alpha,\Omega)=(D\beta,\Omega)=0$．これを使うと

$$(4.22)\quad J''(0)=(D\alpha,D\alpha)+2(\Omega,\alpha\wedge\alpha)=(D^*D\alpha,\alpha)+2(\Omega,\alpha\wedge\alpha)$$

となる．$(\Omega,\alpha\wedge\alpha)$ を次のように書き直す．

$$(\Omega,\alpha\wedge\alpha)=\int\langle\alpha\wedge\alpha\wedge*\Omega\rangle=(-1)^{n-1}\int\langle\alpha\wedge*\Omega\wedge\alpha\rangle$$
$$=\int\langle\alpha\wedge**(*\Omega\wedge\alpha)\rangle=(*(*\Omega\wedge\alpha),\alpha).$$

上のような計算をするとき，$\mathfrak{g}$ を線形 Lie 環とみなし，$\frac{1}{2}[\alpha,\alpha]$ の代わりに $\alpha\wedge\alpha$ と書くだけでなく，Ad 不変の内積も (4.3)，(4.4) におけるように $-\mathrm{tr}(XY)$ と思えば符号等を間違えることがない．例えば，$\mathrm{tr}(XYZ)=\mathrm{tr}(YZX)$ であることと，1 次微分形式 α と $(n-1)$ 次微分形式 $\alpha\wedge*\Omega$ は入れかえると符号 $(-1)^{n-1}$ がつくことから，$\langle\alpha\wedge\alpha\wedge*\Omega\rangle=(-1)^{n-1}\langle\alpha\wedge*\Omega\wedge\alpha\rangle$ となる．次の等号は，$(n-1)$ 次微分形式に対しては $**=(-1)^{n-1}$ であることを使っている．

したがって，(4.22) は，次のように書ける．

(4.23) $J''(0) = (D^* D\alpha + 2*(*\Omega \wedge \alpha),\ \alpha) = (S(\alpha), \alpha)$.

ここで $S: A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ は

(4.24) $$S(\alpha) = D^* D\alpha + 2*(*\Omega \wedge \alpha)$$

と定義される．以上の計算を T^*M の局所的正規直交基となる1次微分形式 $\theta^1, \cdots, \theta^n$ を使って繰り返してみる．

$$\alpha = \sum a_i \theta^i, \qquad \Omega = \frac{1}{2} \sum F_{ij} \theta^i \wedge \theta^j$$

としたとき，Ricciの恒等式を使って

(4.25) $$D^* D\alpha = \sum_{i,j} (-a_{j,i,i} + a_{i,i,j} + (a_i F_{ji} - F_{ji} a_i) + a_i R_{ij}) \theta^j$$

となる．ここで，記号を簡単にするため，$\nabla_k \nabla_j a_i$ を $a_{i,j,k}$ と書いた．一方

(4.26) $$\begin{aligned} 2(\Omega, a \wedge a) &= 2\left(\frac{1}{2} \sum F_{ij} \theta^i \wedge \theta^j,\ \frac{1}{2} \sum (a_i a_j - a_j a_i) \theta^i \wedge \theta^j\right) \\ &= \sum (F_{ij},\ a_i a_j - a_j a_i) \\ &= \sum (a_i F_{ji} - F_{ji} a_i,\ a_j) \end{aligned}$$

となる．上の最後の等号は $\mathfrak{g}$ の内積が AdG 不変であることの結果である．(すなわち，$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対し $(X, YZ - ZY) = -(YX - XY, Z)$ であるが，α, Ω が $\mathfrak{g}$ 値の微分形式で α は1次であることを考慮に入れると，符号は (4.26) のようになる．) (4.22), (4.25), (4.26) を比べて

(4.27) $$S(\alpha) = \sum (-a_{j,i,i} + a_{i,i,j} + 2(a_i F_{ji} - F_{ji} a_i) + a_i R_{ij}) \theta^j$$

とおけば，(4.23) と同じく $J''(0) = (S(\alpha), \alpha)$ を得る．

Yang-Mills接続はその第二変分 $J''(0) = (S(\alpha), \alpha)$ がすべての $\alpha \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ に対して非負，すなわち $(S(\alpha), \alpha) \geqq 0$, ならば**弱安定** (weakly stable) であるという．接続がYang-Mills汎関数 J の極小点ならば弱安定であることはいうまでもない．

問題 4.1 P を向きのついたコンパクト・リーマン多様体 M 上の主 G 束とする．G が可換ならば $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ は直積 $M \times \mathfrak{g}$ であるから，P の接続の曲率は $\mathfrak{g}$ 値の2次閉微分形式である．特に $G = U(1)$ ならば曲率は $\mathfrak{u}(1) = i\boldsymbol{R}$ に値をもつ2次閉微分形式である．このとき，P の接続がYang-Mills接続であるための条件は曲率形式が調和微分形

式となることである．そして P には常に Yang–Mills 接続が存在し，ゲージ変換を除けば一意で，Yang–Mills 汎関数を最小にする．

§5.　弱安定な Yang–Mills 接続

前節で求めた Yang–Mills 汎関数の第二変分の式を M が球面 S^n の場合に応用してみる．まず一般の場合を考え，P は向きのついたコンパクト・リーマン多様体上の主 G 束とする．ω は P の接続形式，Ω はその曲率形式とする．一方 $e_1, \cdots, e_n$ を M の正規直交標構，$\theta^1, \cdots, \theta^n$ は双対標構，M の Levi–Civita 接続形式を $(\theta_j{}^i)$，その曲率形式を $(\Theta_j{}^i)$ とし，

(5.1)
$$\Omega = \frac{1}{2}\sum F_{ij}\theta^i \wedge \theta^j ,$$

(5.2)
$$\Theta_j{}^i = \frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\theta^k \wedge \theta^l$$

と書く．(Ω は $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値をとる 2 次微分形式と考え，各 F_{ij} は $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ の局所切断と考える．)

以上のほかに $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ 値の任意の 2 次微分形式

(5.3)
$$\Psi = \frac{1}{2}\sum b_{ij}\theta^i \wedge \theta^j$$

を一つ考える．(4.25) を導いたのと同様に

(5.4)
$$D^*\Psi = -\sum b_{ij,i}\theta^j ,$$
$$D\Psi = \frac{1}{3!}\sum (b_{ij,k} - b_{kj,i} - b_{ik,j})\theta^i \wedge \theta^j \wedge \theta^k ,$$

(5.5)
$$DD^*\Psi = \frac{1}{2}\sum(b_{ij,i,k} - b_{ik,i,j})\theta^j \wedge \theta^k ,$$

(5.6)
$$D^*D\Psi = \frac{1}{2}\sum (b_{ij,k,i} - b_{kj,i,i} - b_{ik,j,i})\theta^j \wedge \theta^k$$

を得る．$\Delta = DD^* + D^*D$ とおいて，(5.5) + (5.6) に Ricci の恒等式を使うと次式を得る．

(5.7) $$\Delta\Psi = \frac{1}{2}\sum(-b_{jk,i,i} - 2F_{ik}b_{ij} + 2b_{ij}F_{ik} - 2b_{ij}R_{ik} + 2b_{ih}R_{hjik})\theta^j \wedge \theta^k.$$

Bianchi の恒等式を最後の項に適用し，$b_{jk} = -b_{kj}$ を使えば

(5.8) $$(\Delta\Psi, \Psi) = \frac{1}{2}\sum(-b_{jk,i,i} + 2(b_{ik}F_{ji} - F_{ji}b_{ik}) + 2b_{ik}R_{ij} - b_{ih}R_{ihjk},\ b_{jk}).$$

さて，以下 M は $\boldsymbol{R}^N$ の部分多様体で

(5.9) $$\boldsymbol{y} : M \longrightarrow \boldsymbol{R}^N, \qquad \boldsymbol{y} = (y^1, \cdots, y^N)$$

を等長埋めこみとし，3章 §3の記号を使う．ただし，Levi-Civita 接続形式をここでは $(\theta_j{}^i)$ と書く．

(5.10) $$d\boldsymbol{y} = \sum\theta^i e_i, \qquad dy^A = \sum y_i{}^A\theta^i \qquad (A = 1, 2, \cdots, N)$$

したがって，M の接ベクトルを $\boldsymbol{R}^N$ のベクトルと考えたとき

(5.11) $$e_i = (y_i{}^1, \cdots, y_i{}^N) \in \boldsymbol{R}^N.$$

各 $A = 1, 2, \cdots, N$ に対し，$P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ 値の1次微分形式 α^A を

(5.12) $$\alpha^A = \sum\alpha_j{}^A\theta^j \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g}), \qquad \text{ここで，} \alpha_j{}^A = \sum b_{ij}y_i{}^A,$$

と定義する．（これは，関数 y^A の勾配 $\mathrm{grad}\, y^A = \sum y_i{}^A e_i$ で Ψ を縮約したものである．） この α^A に対し，(4.27) で定義した $S(\alpha^A)$ を計算し，第二変分 $J_A''(0) = (S(\alpha^A), \alpha^A)$ の和 $\sum_{A=1}^{N} J_A''(0)$ を求める．記号を簡単にするため，

$$\alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^N), \qquad \alpha_j = (\alpha_j{}^1, \cdots, \alpha_j{}^N)$$

とおけば

$$\alpha = \sum b_{ij}e_i\theta^j = \sum\alpha_j\theta^j.$$

さて，$S(\alpha) = (S(\alpha^1), \cdots, S(\alpha^N))$ は次の4式の和として書ける．

(5.13) $$\begin{aligned} -\sum\alpha_{j,i,i} &= \sum(b_{jk,i,i}e_k + 2b_{jk,i}e_{k,i} + b_{jk}e_{k,i,i}), \\ \sum\alpha_{i,i,j} &= -\sum(b_{ik,i,j}e_k + b_{ik,i}e_{k,j} + b_{ik,j}e_{k,i} + b_{ik}e_{k,i,j}), \\ 2\sum(\alpha_iF_{ji} - F_{ji}\alpha_i) &= -2\sum(b_{ik}F_{ji} - F_{ji}b_{ik})e_k, \\ \sum\alpha_iR_{ij} &= -\sum b_{ik}R_{ij}e_k. \end{aligned}$$

ただし，ここで $e_{i,j}$, $e_{i,j,k}$ 等はベクトル場 e_i の共変微分を表わす．これらは，

$$de_i - \sum_{j=1}^{n} e_j \theta_i{}^j = \sum_{j=1}^{n} e_{i,j} \theta^j , \qquad i = 1, \cdots, n,$$

$$de_{i,j} - \sum_{k=1}^{n} e_{k,j} \theta_i{}^k - \sum_{k=1}^{n} e_{i,k} \theta_j{}^k = \sum_{k=1}^{n} e_{i,j,k} \theta^k , \quad i,j = 1, \cdots, n,$$

で与えられるから，3 章の (3.2)，(3.10) を使えば

$$(5.14) \qquad \begin{aligned} e_{i,j} &= \sum_{\lambda=n+1}^{N} e_\lambda h^\lambda{}_{ij} , \\ e_{i,j,k} &= \sum_{\lambda=n+1}^{N} e_\lambda h^\lambda{}_{ij,k} - \sum_{h=1}^{n} \sum_{\lambda=n+1}^{N} e_h h^\lambda{}_{ij} h^\lambda{}_{kh} \end{aligned}$$

である．したがって，(5.13) と (5.14) から $\sum_{A=1}^{N} (S(\alpha^A), \alpha^A)$ は次の 4 式の和になることがわかる．

$$(5.15) \qquad \begin{aligned} -\sum (\alpha^A{}_{j,i,i}, \ \alpha_j{}^A) &= -\sum (b_{jk,i,i}, \ b_{jk}) + \sum (h^\lambda{}_{ik} h^\lambda{}_{ih} b_{jh}, \ b_{jk}) , \\ \sum (\alpha^A{}_{i,i,j}, \ \alpha_j{}^A) &= \sum (b_{ik,i,j}, \ b_{jk}) , \\ 2 \sum (\alpha_i{}^A F_{ji} - F_{ji} \alpha_i{}^A, \ \alpha_j{}^A) &= 2 \sum (b_{ik} F_{ji} - F_{ji} b_{ik}, \ b_{jk}) . \end{aligned}$$

上の項の和を (5.8) を使って計算すると

$$(5.16) \qquad \begin{aligned} \sum_{A=1}^{N} J_A''(0) = 2(\Delta\Psi, \Psi) &- \sum (b_{ik} R_{ij}, \ b_{jk}) + \sum (b_{ih} R_{ihjk}, \ b_{jk}) \\ &+ \sum (h^\lambda{}_{ik} h^\lambda{}_{ih} b_{jh}, \ b_{jk}) + \sum (b_{ik,i,j}, \ b_{jk}). \end{aligned}$$

ここで

$$\sum (b_{ik,i,j}, \ b_{jk}) = -\sum (b_{ik,i}, \ b_{jk,j}) = -(D^*\Psi, \ D^*\Psi),$$

$$R_{kh} = \sum (h^\lambda{}_{kh} h^\lambda{}_{ii} - h^\lambda{}_{ik} h^\lambda{}_{ih})$$

を使うと

$$(5.17) \qquad \begin{aligned} \sum_{A=1}^{N} J_A''(0) = 2(\Delta\Psi, \Psi) &- (D^*\Psi, D^*\Psi) + H(\Psi, \Psi) \\ &- 2 \operatorname{Ric}(\Psi, \Psi) + R(\Psi, \Psi) , \end{aligned}$$

ただし，ここで

$$\begin{aligned} H(\Psi, \Psi) &= \sum (h^\lambda{}_{ii} h^\lambda{}_{kh} b_{jh}, \ b_{jk}) , \\ \operatorname{Ric}(\Psi, \Psi) &= \sum (b_{ik} R_{ij}, \ b_{jk}) , \\ R(\Psi, \Psi) &= \sum (b_{ih} R_{ihjk}, \ b_{jk}) . \end{aligned}$$

特に，M が $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内の単位球 S^n ならば $h_{ij}=\delta_{ij}$ であるから，(5.17) は

$$(5.18)\quad \sum_{A=1}^{n+1} J_A''(0) = 2(\Delta\Psi, \Psi) - (D^*\Psi, D^*\Psi) + 2(4-n)(\Psi, \Psi)$$

となる．ただし，ここで

$$(\Psi, \Psi) = \frac{1}{2}\sum (b_{jk}, b_{jk}) .$$

ここで，Ψ を P の Yang-Mills 接続の曲率形式とすれば，$D\Psi$ も $D^*\Psi$ も 0 であるから，(5.18) の右辺は $2(4-n)(\Psi,\Psi)$ となる．したがって，$n \geqq 5$ ならば，$\Psi \equiv 0$ でない限り $\sum J_A''(0) < 0$ となり，次の **J. Simons の定理**を得る．

(5.19)　**定理**　G をコンパクト Lie 群，P を $S^n(n \geqq 5)$ 上の主 G 束とする．P の Yang-Mills 接続は，その曲率が 0 でない限り，弱安定ではあり得ない．

次章では 4 次元リーマン多様体，特に S^4 上の主ファイバー束の Yang-Mills 接続を考えるが，主として Yang-Mills 汎関数の最小値を与える接続を調べる．上の定理は S^n $(n \geqq 5)$ の場合には直積束の場合を除いては，Yang-Mills 汎関数を極小にするような接続は存在し得ないことを示している．

コンパクト・リーマン多様体 M が (5.19) の S^n $(n \geqq 5)$ と同じような性質を持っているとき **Yang-Mills 不安定** (Yang-Mills unstable) であるということにする．すなわち，M 上にいかなるコンパクト Lie 群 G を構造群とするいかなる主ファイバー束をとっても，その Yang-Mills 接続は，その曲率が 0 でない限り，弱安定ではあり得ないときに M を Yang-Mills 不安定なリーマン多様体と呼ぶのである．

Cayley 射影平面 $P_2(\mathbf{Cay})$ と通常 E_6/F_4 の記号で表わされる例外対称空間も Yang-Mills 不安定である．その他にもいくつか Yang-Mills 不安定なリーマン多様体の例は知られているが数多くない．調和写像に関しても同様に調和的不安定なリーマン多様体の概念を導入することができるが，この二つの不安

定性の間にはかなりの類似性がある．これらのことについて更に詳しくは J. P. Bourguignon - H. B. Lawson の Stability and isolation phenomena for Yang-Mills field, Commun. Math. Phys. 79 (1981), 189-230, H. T. Laquer の Stability properties of the Yang-Mills functional near the canonical connection, Michigan Math. J. 31 (1984), 139-159 および S. Kobayashi - Y. Ohnita - M. Takeuchi の On instability of Yang-Mills connections, Math. Zeitschr. 193 (1986), 165-189 を参照されたい．

6
4次元多様体上の Yang-Mills 接続

n 次元リーマン多様体上で Hodge の作用素 $*$ は 2 次微分形式を $n-2$ 次微分形式に移す．したがって，4 次元の場合には $*$ によって不変な 2 次微分形式(自己双対な微分形式)とか，$*$ によって符号だけ変わる 2 次微分形式(反自己双対な微分形式)というものを定義することができる．曲率は 2 次微分形式であるから，それが自己双対(あるいは反自己双対)であるかどうかということに意味がある．ファイバー束の接続で曲率が(反)自己双対であるものは Yang-Mills 汎関数の最小値を与える．この章ではそのような接続((反)インスタントンと呼ばれる)の全体を考える．4 次元の球面上の簡単なファイバー束の場合に特に詳しく調べる．

§1. 2次微分形式の分解

向きのついた4次元リーマン多様体 M 上の2次微分形式を自己双対なものと反自己双対なものに分解する．これは M の1点 x での双対接空間 $T_x{}^*M$ での代数的な話であるから，以下

$$V = T_x{}^* M$$

とおいて話を進める．M が4次元であるから，Hodge の $*$ 作用素は2次微分形式を2次微分形式に移す．

$$* : \wedge^2 V \longrightarrow \wedge^2 V.$$

また，$\wedge^2 V$ では $** = 1$ となる．すなわち，

$$**\varphi = \varphi, \qquad \varphi \in \wedge^2 V. \tag{1.1}$$

したがって，$*$ の固有値は ± 1 である．それぞれの固有空間を $\wedge^2{}_\pm V$ と書けば分解

$$\wedge^2 V = \wedge^2{}_+ V \oplus \wedge^2{}_- V \tag{1.2}$$

が得られる．$\wedge^2{}_+ V$ の元は**自己双対的** (self-dual)，$\wedge^2{}_- V$ の元は**反自己双対的** (anti-self-dual) であるという．M の向きを逆にすれば $*$ は $-*$ に変わるから，$\wedge^2{}_+ V$ と $\wedge^2{}_- V$ が入れかわることに注意しておく．

いま，$(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4)$ を V の向きに合った正規直交基とすると，

$$\begin{aligned} &*(\theta^1 \wedge \theta^2) = \theta^3 \wedge \theta^4, \qquad *(\theta^1 \wedge \theta^3) = \theta^4 \wedge \theta^2, \\ &*(\theta^1 \wedge \theta^4) = \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

であるから，$\wedge^2{}_+ V$ と $\wedge^2{}_- V$ はそれぞれ，(1.4), (1.5) の元を基としてもつ．

$$\begin{aligned} &\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4, \qquad \theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^4 \wedge \theta^2, \\ &\theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3 \in \wedge^2{}_+ V, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4, \qquad \theta^1 \wedge \theta^3 - \theta^4 \wedge \theta^2, \\ &\theta^1 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^3 \in \wedge^2{}_- V. \end{aligned} \tag{1.5}$$

$*$ 作用素は長さを保つ変換であるから，分解 (1.2) が直交分解であることは

当然であるが，上の $\wedge^2{}_+V$ と $\wedge^2{}_-V$ の基からも $\wedge^2{}_+V$ と $\wedge^2{}_-V$ が直交していることは明らかである．したがって，

$$\varphi=\varphi_++\varphi_-,\qquad \varphi_+\in\wedge^2{}_+V,\ \varphi_-\in\wedge^2{}_-V$$

とすれば，φ の長さの2乗 $|\varphi|^2$ は

$$|\varphi|^2=|\varphi_+|^2+|\varphi_-|^2 \tag{1.6}$$

となる．これは次のようにしても確かめられる．

$$\begin{aligned}\varphi\wedge*\varphi&=(\varphi_++\varphi_-)\wedge*(\varphi_++\varphi_-)=(\varphi_++\varphi_-)\wedge(\varphi_+-\varphi_-)\\&=\varphi_+\wedge\varphi_+-\varphi_-\wedge\varphi_-=\varphi_+\wedge*\varphi_++\varphi_-\wedge*\varphi_-.\end{aligned}$$

これは

$$|\varphi|^2\theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3\wedge\theta^4=(|\varphi_+|^2+|\varphi_-|^2)\,\theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3\wedge\theta^4$$

にほかならない．

一方，$\varphi\wedge\varphi$ を同様に計算すると

$$\begin{aligned}\varphi\wedge\varphi&=(\varphi_++\varphi_-)\wedge(\varphi_++\varphi_-)=(\varphi_++\varphi_-)\wedge(*\varphi_+-*\varphi_-)\\&=\varphi_+\wedge*\varphi_+-\varphi_-\wedge*\varphi_-=(|\varphi_+|^2-|\varphi_-|^2)\theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3\wedge\theta^4\end{aligned}$$

を得る．後のために，まとめて

$$\begin{aligned}\varphi\wedge*\varphi&=(|\varphi_+|^2+|\varphi_-|^2)\theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3\wedge\theta^4,\\\varphi\wedge\varphi&=(|\varphi_+|^2-|\varphi_-|^2)\theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3\wedge\theta^4\end{aligned} \tag{1.7}$$

と書いておく．

分解 (1.2) について二，三注意しておく．M のリーマン計量 g に正の関数 f^2 を掛けて，共形変換を行うと $\frac{1}{f}\theta^1,\cdots,\frac{1}{f}\theta^4$ が正規直交基となる．したがって，f^2g に関する $*:\wedge^2V\to\wedge^2V$ は g に関する $*:\wedge^2V\to\wedge^2V$ と一致する．(一般に，M の次元が偶数 $2m$ ならば $*:\wedge^mV\to\wedge^mV$ は共形的変換により不変である．) したがって，分解 (1.2) も g の共形的変換により不変である．

$\wedge^2V$ は，$SO(4)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(4)$ と同一視される．一般に M が n 次元ならば，$\wedge^2V$ は $\mathfrak{so}(n)$ と同一視される．同型写像 $\wedge^2V\to\mathfrak{so}(n)$ は，$\xi\wedge\eta\in\wedge^2V$

に対し，V の歪対称な変換

$$\zeta \in V \longrightarrow \langle \eta, \zeta \rangle \xi - \langle \xi, \zeta \rangle \eta \in V$$

を対応させる．ここで $\langle , \rangle$ は V の内積．例えば $\theta^1 \wedge \theta^2$ に対応する変換は，行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

で与えられる．$\mathfrak{so}(n)$ は $n \neq 4$ の場合は単純であるが，$\mathfrak{so}(4)$ は $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ と分解されることが知られている．これは $\wedge^2 V$ の分解 $\wedge^2{}_+ V \oplus \wedge^2{}_- V$ に対応する．これは対応

$$\frac{1}{2}(\theta^1 \wedge \theta^2 \pm \theta^3 \wedge \theta^4) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & \mp 1 & 0 \end{pmatrix} = A_\pm ,$$

$$\frac{1}{2}(\theta^1 \wedge \theta^4 \pm \theta^2 \wedge \theta^3) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_\pm , \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{2}(\theta^1 \wedge \theta^3 \pm \theta^4 \wedge \theta^2) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C_\pm$$

によって与えられる．

$$\begin{aligned} &[A_+, B_+] = C_+ , \qquad [B_+, C_+] = A_+ , \qquad [C_+, A_+] = B_+ , \\ &[A_-, B_-] = -C_- , \qquad [B_-, C_-] = -A_- , \qquad [C_-, A_-] = -B_- \end{aligned} \tag{1.10}$$

で，$\mathfrak{so}(4)$ は A_+, B_+, C_+ の生成する Lie 環と，A_+, B_-, C_- の生成する Lie 環の直和になる．

Lie 環 $\mathfrak{so}(4)$ の分解に対応する群 $SO(4)$ の分解を調べるには 4 元数を使うのが便利である． 4 元数 $q = u + vi + xj + yk$ の全体を $\boldsymbol{H}$ と書くが，$\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{R}^4$ とみなすこともある．長さ 1 の 4 元数の全体

$$Sp(1) = \{q = u + vi + xj + yk \,;\, |q|^2 = u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1\}$$

は掛け算で群になるが，一方 $\boldsymbol{R}^4$ の中の単位球 S^3 とも同相である． $Sp(1)$ を $\boldsymbol{H}$ に左から作用させることにより，表現 $\rho_+ : Sp(1) \to SO(4)$ を得る．すなわち

$$qi = ui - v - xk + yj\,, \qquad qj = uj + vk - x - yi\,,$$
$$qk = uk - vj + xi - y$$

から

$$(1.11) \qquad \rho_+(q) = \begin{pmatrix} u & -v & -x & -y \\ v & u & -y & x \\ x & y & u & -v \\ y & -x & v & u \end{pmatrix}.$$

同様に $Sp(1)$ を $\boldsymbol{H}$ に右から作用させることにより，表現 $\rho_- : Sp(1) \to SO(4)$ を得る．すなわち，

$$(1.12) \qquad \rho_-(q) = \begin{pmatrix} u & -v & -x & -y \\ v & u & y & -x \\ x & -y & u & v \\ y & x & -v & u \end{pmatrix}.$$

表現 ρ_+, ρ_- は共に忠実である．すなわち，$\rho_+{}^{-1}(I) = \rho_-{}^{-1}(I) = \{1\}$．

$$(1.13) \qquad \boldsymbol{H}^+ = \rho_+(Sp(1)) \subset SO(4), \qquad \boldsymbol{H}^- = \rho_-(Sp(1)) \subset SO(4)$$

とおく．そのとき，$\boldsymbol{H}^+$ (また $\boldsymbol{H}^-$) の Lie 環 $\mathfrak{h}^+$ (また $\mathfrak{h}^-$) は A_+, B_+, C_+ (また A_-, B_-, C_-) によって生成される．

$$(1.14) \qquad \mathfrak{so}(4) = \mathfrak{h}^+ \oplus \mathfrak{h}^-$$

に対応し $SO(4) = \boldsymbol{H}^+ \cdot \boldsymbol{H}^-$ を得るが，正確にいうと，

$$(1.15) \qquad \rho : (q^+, q^-) \in Sp(1) \times Sp(1) \longrightarrow \rho_+(q^+) \cdot \rho_-(q^-) \in SO(4)$$

とするとき，ρ は全射で，その核 $\rho^{-1}(I)$ は二つの元 $(1,1), (-1,-1) \in Sp(1)$

$\times Sp(1)$ からなる．したがって

(1.16) $$SO(4) \cong (\boldsymbol{H}^+ \times \boldsymbol{H}^-)/\{(1,1),(-1,-1)\}$$

とも書ける．また，$\boldsymbol{H}^+, \boldsymbol{H}^-$ は $SO(4)$ の正規部分群で

(1.17) $$\begin{aligned} SO(4)/\boldsymbol{H}^+ &\cong \boldsymbol{H}^-/\{\pm 1\} \cong Sp(1)/\{\pm 1\} \cong SO(3), \\ SO(4)/\boldsymbol{H}^- &\cong \boldsymbol{H}^+/\{\pm 1\} \cong Sp(1)/\{\pm 1\} \cong SO(3) \end{aligned}$$

なる同型関係がある (問題 1.1 参照)．

問題 1.1 上記 (1.17) における同型関係 $Sp(1)/\{\pm 1\} \cong SO(3)$ を証明せよ．(これにより S^3 は $SO(3)$ の二重被覆空間であることがわかる.)

§2. 自己双対な共形構造

3章の (5.23) で与えた Weyl 共形曲率テンソルの定義を書き直して

(2.1) $$R_{ijkl} = W_{ijkl} + K_{ijkl} + S_{ijkl}.$$

ただし，ここで

(2.2) $$\begin{aligned} K_{ijkl} = \frac{1}{n-2}\Big\{ &-\Big(R_{jk} - \frac{\sigma}{n}\delta_{jk}\Big)\delta_{il} + \Big(R_{jl} - \frac{\sigma}{n}\delta_{jl}\Big)\delta_{ik} \\ &+ \Big(R_{ik} - \frac{\sigma}{n}\delta_{ik}\Big)\delta_{jl} - \Big(R_{il} - \frac{\sigma}{n}\delta_{il}\Big)\delta_{jk}\Big\}, \end{aligned}$$

(2.3) $$S_{ijkl} = \frac{\sigma}{n(n-1)}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

とおく．3章の問題 6.1 のように四重線形写像

$$R : V \times V \times V \times V \longrightarrow \boldsymbol{R} \qquad (V = \boldsymbol{R}^n)$$

で曲率と同様な代数的恒等式を満たすものの全体を $\mathscr{R}$ とし，対称双線形形式

$$B : V \times V \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

の全体を $\mathscr{B} = S^2 V^*$ と書く．そして，Ricci の縮約 (Ricci's contraction)

$$c : \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{B}, \qquad R = (R_{ijkl}) \longmapsto B = (B_{jl}), \text{ ここで，} B_{jl} = \sum R_{ijil}$$

の核を

(2.4) $$\mathscr{R}_W = c^{-1}(0)$$

と書くことにすると，Weyl テンソル (W_{ijkl}) は $\mathscr{R}_W$ に属する．次に対称 2 次テンソル $(K_{ij}) \in \mathscr{B}$ で $\mathrm{tr}(K_{ij}) = \sum K_{ii} = 0$ を満たすものから (2.2) と同様の式を使って

$$K_{ijkl} = \frac{1}{n-2}\{-K_{jk}\delta_{il} + K_{jl}\delta_{ik} + K_{ik}\delta_{jl} - K_{il}\delta_{jk}\} \tag{2.5}$$

と定義し，このようなテンソル (K_{ijkl}) の全体を $\mathscr{R}_0$ と書く．最後に，

$$S_{ijkl} = \frac{s}{n(n-1)}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \qquad s \in \boldsymbol{R} \tag{2.6}$$

の形のテンソル全体を $\mathscr{R}_1$ と書けば，(2.1) により $\mathscr{R}$ は

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_W \oplus \mathscr{R}_0 + \mathscr{R}_1 \tag{2.7}$$

と分解される．そして（問題 2.1 参照）

$$\begin{aligned} &\dim \mathscr{R}_1 = 1, \qquad \dim \mathscr{R}_0 = \frac{1}{2}(n-1)(n+2), \\ &\dim \mathscr{R}_W = \frac{1}{2^2 3}n(n+1)(n+2)(n-3). \end{aligned} \tag{2.8}$$

さて，ここで $n=4$ とすると，分解 (1.2) を使うことにより，(2.7) はさらに細分されることを示そう．$\mathscr{R}$ の元 R は $\wedge^2 V$ 上の対称線形形式とも考えられるし，対称な 1 次変換 $\wedge^2 V \to \wedge^2 V$ とも考えられるが，後者のように考えたとき，$\mathscr{R}_1$ の元 (2.6) は $\dfrac{s}{n(n-1)} I_{\wedge^2 V}$ を与える（ここで，$I_{\wedge^2 V}$ は $\wedge^2 V$ の恒等変換である）．一方，(2.5) で与えられる $\mathscr{R}_0$ の元 K は $\wedge^2 V$ の変換として（問題 2.2 参照）

$$* \circ K = -K \circ * \tag{2.9}$$

を満たすことが $\sum K_{ii} = 0$ を使って確かめられる．したがって K は $\wedge^2{}_+ V$ を $\wedge^2{}_- V$ に，そして $\wedge^2{}_- V$ を $\wedge^2{}_+ V$ に変換する．さらに，$\mathscr{R}_W$ の元 $W = (W_{ijkl})$ は $\sum_{i=1}^{4} W_{ijil} = 0$ および Bianchi の恒等式を満たすから

$$\begin{aligned} &W_{ijij} = W_{klkl}, \\ &W_{ikil} + W_{jkjl} = 0 \end{aligned} \qquad (i,j,k,l：たがいに相異なる) \tag{2.10}$$

を得る．このことから，$W \in \mathscr{R}_W$ は $\wedge^2 V$ の変換として（問題 2.3 参照）

$$* \circ W = W \circ * \tag{2.11}$$

を満たす．したがって W は $\wedge^2_+V$ を $\wedge^2_+V$ に，そして $\wedge^2_-V$ を $\wedge^2_-V$ に変換する．分解 $\wedge^2V=\wedge^2_+V\oplus\wedge^2_-V$ に応じて $\wedge^2V$ の基をえらべば，(2.1) は6次の行列として次の形に書ける．

$$(2.12)\qquad \begin{pmatrix} W^+ & 0 \\ 0 & W^- \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & K^+ \\ {}^tK^+ & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{12}I & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{12}I \end{pmatrix}$$

したがって，$\mathscr{R}_W$ は

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} &\mathscr{R}_W=\mathscr{R}_W{}^+\oplus\mathscr{R}_W{}^-, \qquad W=W^+\oplus W^-, \\ &\mathscr{R}_W{}^+=\{W\in\mathscr{R}_W\,;\,*\circ W=W\circ *=W\}, \\ &\mathscr{R}_W{}^-=\{W\in\mathscr{R}_W\,;\,*\circ W=W\circ *=-W\} \end{aligned}$$

と分解される．

向きのついた4次元リーマン多様体は，その Weyl 共形曲率テンソル W が $W^-=0$ を満たすならば**自己双対** (self-dual) と呼ばれ，$W^+=0$ ならば**反自己双対** (anti-self-dual) と呼ばれる．向きを逆にすれば，自己双対と反自己双対は入れかわる．また自己双対性はリーマン計量そのものでなく，その共形類と M の向きによって定まる性質である．

例 1 M が共形的に平坦，すなわち $W=0$ ならば，M は (反) 自己双対である．特に，$S^4, S^1\times S^3$，4次元の平坦なトーラス T^4 等はその例である．

例 2 M を向きのついた曲面 R と S の直積とし，e_1, e_2 と e_3, e_4 をそれぞれ R と S の正規直交標構とすれば，

$$W_{1212}=W_{3434}=\frac{\sigma}{6}, \qquad W_{1313}=W_{1414}=W_{2323}=W_{2424}=-\frac{\sigma}{12}.$$

これらから添字の置換で得られない成分は0．したがって，基 (1.4), (1.5) に関して W^+, W^- は次の行列で与えられる．

$$W^+=W^-=\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{12} \end{pmatrix}.$$

4 章§5 で Pontrjagin 類が Weyl 共形曲率テンソルで表わされることを証明した． 4 章 (5.7) で，曲率形式を共形曲率形式 $\Phi_{ij}=\frac{1}{2}\sum W_{ijkl}\theta^k\wedge\theta^l$ でおきかえれば，第 1 Pontrjagin 類 $p_1(M)$ が代表される．すなわち，

$$p_1(M)=\frac{1}{4\pi^2}\sum\Phi_{ij}\wedge\Phi_{ij}. \tag{2.14}$$

ここで，

$$\Phi_{ij}{}^+=\frac{1}{2}(\Phi_{ij}+*\Phi_{ij}),\qquad \Phi_{ij}{}^-=\frac{1}{2}(\Phi_{ij}-*\Phi_{ij}) \tag{2.15}$$

とおけば

$$\begin{aligned}\int_M p_1(M)&=\frac{1}{4\pi^2}\sum\int(\Phi_{ij}{}^++\Phi_{ij}{}^-)\wedge(\Phi_{ij}{}^++\Phi_{ij}{}^-)\\&=\frac{1}{4\pi^2}\sum\int\Phi_{ij}{}^+\wedge*\Phi_{ij}{}^+-\Phi_{ij}{}^+\wedge*\Phi_{ij}{}^-\\&\qquad\qquad+\Phi_{ij}{}^-\wedge*\Phi_{ij}{}^+-\Phi_{ij}{}^-\wedge*\Phi_{ij}{}^-\\&=\frac{1}{4\pi^2}\sum\int(\Phi_{ij}{}^+,\Phi_{ij}{}^+)-(\Phi_{ij}{}^-,\Phi_{ij}{}^-)\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int(|W^+|^2-|W^-|^2)*1\end{aligned} \tag{2.16}$$

を得る．したがって，M に自己双対のリーマン計量（正確には共形構造）が存在するならば，$\int_M p_1(M)=\frac{1}{4\pi^2}\int|W^+|^2\geqq 0$ である．このとき，$p_1(M)=0$ ならば $W^+=0$ で（自己双対の条件 $W^-=0$ と合わせると），M は共形的に平坦でなければならない．例えば S^4 上の自己双対なリーマン計量（共形構造）は，共形的に平坦でなければならない．

問題 2.1　式 (2.8) の結果を証明せよ．

問題 2.2　式 (2.9) を証明せよ．

問題 2.3　式 (2.11) を証明せよ．

問題 2.4　M のリーマン計量が Einstein 計量 (Einstein metric) すなわち $R_{jk}=\frac{\sigma}{n}\delta_{jk}$ となるための必要十分条件は分解 (2.12) において $K^+=0$ となることである．

§3. (反)自己双対接続

§1では2次微分形式の分解

$$\wedge^2 TM = \wedge^2_+ TM \oplus \wedge^2_- TM$$

を考えた．この分解はベクトル束 E に値をとる2次微分形式に拡張される，すなわち，

$$E \otimes \wedge^2 TM = E \otimes \wedge^2_+ TM \oplus E \otimes \wedge^2_- TM.$$

特に構造群 G の主ファイバー束 P の接続の曲率 R は，$P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値をとる2次微分形式であるから，

$$R = R_+ \oplus R_- \qquad (*R_+ = R_+,\ \ *R_- = -R_-) \tag{3.1}$$

と分解される．$R = R_+$ (すなわち $R_- = 0$) ならば，その接続は**自己双対**であるといい，また $R = R_-$ (すなわち $R_+ = 0$) ならば，その接続は**反自己双対**であるという．

(1.7) によれば

$$|R|^2 = |R_+|^2 + |R_-|^2. \tag{3.2}$$

R は $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ 値の微分形式であるから，上式で $|R|$ を定義するには M のリーマン計量だけでなく，AdG 不変な $\mathfrak{g}$ の内積 $\beta(\ ,\ )$ を使う．$\mathfrak{g}$ の正規直交基 $B_1, \cdots, B_r$ に関して局所的に

$$R = \frac{1}{2}\sum F^i{}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \otimes B_i, \qquad F^i{}_{\alpha\beta} = -F^i{}_{\beta\alpha},$$

$$R_+ = \frac{1}{2}\sum F_+{}^i{}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \otimes B_i, \qquad F_+{}^i{}_{\alpha\beta} = -F_+{}^i{}_{\beta\alpha}, \tag{3.3}$$

$$R_- = \frac{1}{2}\sum F_-{}^i{}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \otimes B_i, \qquad F_-{}^i{}_{\alpha\beta} = -F_-{}^i{}_{\beta\alpha}$$

と書くと

$$|R|^2 = \sum |F^i{}_{\alpha\beta}|^2, \qquad |R_+|^2 = \sum |F_+{}^i{}_{\alpha\beta}|^2, \tag{3.4}$$

$$|R_-|^2 = \sum |F_-{}^i{}_{\alpha\beta}|^2.$$

いま，$\langle R \wedge *R \rangle$ を

(3.5) $$\langle R \wedge *R\rangle = \beta(R, *R) = \sum_i \left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} F^i{}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta\right) \wedge * \left(\frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta} F^i{}_{\gamma\delta}\theta^\gamma \wedge \theta^\delta\right)$$

と定義すると,

(3.6) $$\langle R \wedge *R\rangle = |R|^2\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4 = (|R_+|^2 + |R_-|^2)\,\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4.$$

P の接続 (形式) ω の曲率を R とするとき, Yang–Mills 汎関数 J は

(3.7) $$J(\omega) = \frac{1}{2}\int_M \langle R\wedge *R\rangle = \int_M (|R_+|^2 + |R_-|^2)\,\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4$$

で与えられる.

次に, $\langle R \wedge R\rangle$ を

(3.8) $$\langle R \wedge R\rangle = \beta(R, R) = \sum_i \left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} F^i{}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta\right) \wedge \left(\frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta} F^i{}_{\gamma\delta}\theta^\gamma \wedge \theta^\delta\right)$$

と定義すると, (1.8) により

(3.9) $$\langle R \wedge R\rangle = (|R_+|^2 - |R_-|^2)\,\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4.$$

$\mathfrak{g}$ 上の $Ad\,G$ 不変な対称2次形式 β によって定義される特性微分形式 $\beta(R,R)$ のコホモロジー類は接続に依存しない. すなわち,

(3.10) $$\int_M \langle R \wedge R\rangle = \int_M (|R_+|^2 - |R_-|^2) * 1$$

は接続に依存しない数 (内積 β によって定まる P の特性数) である. これを $c(P, \beta)$ と書くことにする.

(3.7) と (3.10) を比べると

(3.11) $$J(\omega) = \frac{1}{2}c(P,\beta) + \int |R_-|^2 * 1$$

とも

(3.12) $$J(\omega) = -\frac{1}{2}c(P,\beta) + \int |R_+|^2 * 1$$

とも書ける. $c(P,\beta) \geqq 0$ の場合には (3.11) を, $c(P,\beta) \leqq 0$ の場合には

(3.12) を使うことにより

$$J(\omega) \geqq \frac{1}{2}|c(P,\beta)| \tag{3.13}$$

を得る．この式の意味するところは，$J(\omega)$ の下限として，P のトポロジーできまる不変量 $\frac{1}{2}|c(P,\beta)|$ がとれるということである．そして $J(\omega)$ がこの下限に等しくなる（すなわち，(3.13) で等号が成り立つ）のは，ω の曲率 R が

$$R_- = 0 \qquad (c(P,\omega) \geqq 0 \text{ の場合}), \tag{3.14}$$

すなわち，ω が自己双対的接続であるか，または

$$R_+ = 0 \qquad (c(P,\omega) \leqq 0 \text{ の場合}), \tag{3.15}$$

すなわち，反自己双対的接続の場合である．そのとき ω は J の臨界点（実際は J の最小値を与える点）であるから，Yang–Mills の接続である．§1 で注意したように，M の向きを逆にすると，自己双対的接続と反自己双対的接続は入れかわる．したがって，理論的にはどちらか一方だけを考察すれば充分であるが，M が複素曲面（例えば，複素射影平面 P_2C）のように，自然に方向がついている場合には，その向きを逆にするのは好ましくない．

物理では，自己双対的接続を **インスタントン** (instanton)，反自己双対的接続を **反インスタントン** (anti-instanton) とも呼んでいる．

特性数 $c(P,\beta)$ を P の構造群 G が $U(n)$ の場合に調べてみる．Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ の不変内積を β として

$$\beta(X,Y) = -\operatorname{tr}(XY) \tag{3.16}$$

を使う．$X=(x_j{}^i)$，$Y=(y_j{}^i) \in \mathfrak{u}(n)$ は歪 Hermite だから

$$-\operatorname{tr}(XY) = -\sum x_j{}^i y_i{}^j = \sum x_j{}^i \bar{y}_j{}^i \tag{3.17}$$

となることを注意しておく．そのとき

$$\beta(R,R) = -\operatorname{tr}(R\wedge R) = -\sum R_j{}^i \wedge R_i{}^j \tag{3.18}$$

となる．P に同伴するベクトル束を E とする．E のファイバーは C^n である．このベクトル束 E の Chern 類を考えると（4 章 §2，特に (2.20) 参照）

$$(3.19)\qquad c_1(E,\nabla) = -\frac{1}{2\pi i}\operatorname{tr}(R),$$

$$(3.20)\qquad c_2(E,\nabla) = -\frac{1}{8\pi^2}(\operatorname{tr}(R)\wedge\operatorname{tr}(R) - \operatorname{tr}(R\wedge R))$$

であった．したがって

$$(3.21)\qquad \operatorname{tr}(R\wedge R) = 4\pi^2(2c_2(E,\nabla) - c_1(E,\nabla)^2),$$

$$(3.22)\qquad c(P,\beta) = -\frac{1}{2}\int\operatorname{tr}(R\wedge R) = 2\pi^2(c_1(E)^2 - 2c_2(E))$$

となる．ここで $c_1(E)^2 - 2c_2(E)$ は $\int_M c_1(E,\nabla)^2 - 2c_2(E,\nabla)$ のことである．

次に $G=SU(n)$ の場合を考える．$X\in\mathfrak{su}(n)$ に対しては，$\operatorname{tr}(X)=0$ であるから $c_1(E)=0$ となる．したがって

$$(3.23)\qquad c(P,\beta) = -4\pi^2 c_2(E)$$

となる．$|c_2(E)|$ を P の **インスタントン数** (instanton number) とも呼ぶ．

最後に $G=O(n)$ の場合を考える．この場合も

$$(3.24)\qquad \beta(X,Y) = -\operatorname{tr}(XY) = -\sum x_j^i y_i^j = \sum x_j^i y_j^i,$$
$$X=(x_j^i),\quad Y=(y_j^i)\in\mathfrak{o}(n)$$

を使う．P に同伴する実ベクトル束を E とする．4章の (5.7) によれば，E の Pontrjagin 類 $p_1(E)$ (を M 上積分したもの) は

$$(3.25)\qquad p_1(E) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_M\operatorname{tr}(R\wedge R)$$

で与えられるから，

$$(3.26)\qquad c(P,\beta) = 4\pi^2 p_1(E)$$

となる．

次に，向きのついた4次元リーマン空間 M 上，正の正規直交標構束 P を考える．P は $G=SO(4)$ を構造群とする主ファイバー束である．§1 で説明したように Lie 環 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(4)$ は $\wedge^2\boldsymbol{R}^4$ と同一視されるから，

$$(3.27)\qquad P\times_{Ad}\mathfrak{g}\cong\wedge^2 T^*M.$$

(すなわち，T_xM の歪対称自己準同型写像はリーマン計量により，$\wedge^2 T_x^*M$ の元と思える.) §1 で知ったように，分解 (1.14) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4) = \mathfrak{h}^+ \oplus \mathfrak{h}^-$ は分解 (1.2) $\wedge^2 \boldsymbol{R}^4 = \wedge^2{}_+ \boldsymbol{R}^4 \oplus \wedge^2{}_- \boldsymbol{R}^4$ に対応する．分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^+ \oplus \mathfrak{h}^-$ はもちろん $Ad\,G$ 不変で，$\mathfrak{g}$ をファイバーとするベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ は次のように分解する.

$$(3.28)\quad \begin{aligned} &P \times_{Ad} \mathfrak{g} = P \times_{Ad} \mathfrak{h}^+ \oplus P \times_{Ad} \mathfrak{h}^-, \\ &P \times_{Ad} \mathfrak{h}^+ \cong \wedge^2{}_+ T^*M, \qquad P \times_{Ad} \mathfrak{h}^- \cong \wedge^2{}_- T^*M. \end{aligned}$$

(1.13) で定義した部分群 $\boldsymbol{H}^+, \boldsymbol{H}^- \subset SO(4)$ を使って

$$(3.29)\qquad P^+ = P/\boldsymbol{H}^-, \qquad P^- = P/\boldsymbol{H}^+$$

と定義すれば P^+ も P^- も $SO(3) \cong SO(4)/\boldsymbol{H}^- \cong SO(4)/\boldsymbol{H}^+$ を構造群とする主ファイバー束になる ((1.17) 参照)．そして

$$(3.30)\quad \begin{aligned} &P^+ \times_{Ad} \mathfrak{so}(3) \cong P \times_{Ad} \mathfrak{h}^+ \cong \wedge^2{}_+ T^*M, \\ &P^- \times_{Ad} \mathfrak{so}(3) \cong P \times_{Ad} \mathfrak{h}^- \cong \wedge^2{}_- T^*M \end{aligned}$$

である．M の Levi–Civita 接続を主 $SO(4)$ 束 P の接続と考えると，P^+ に接続を引きおこす．(P の接続形式 ω を分解 $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{h}^+ \oplus \mathfrak{h}^-$ にのっとり $\omega = \omega^+ + \omega^-$ と分解すれば，ω^+ は実は P^+ 上の $\mathfrak{h}^+$ 値の微分 1 次形式と考えられ，P^+ に接続を定義する (2 章の問題 5.1 を参照))．その曲率形式は，ω の曲率形式 Ω を $\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$ と分解したとき Ω^+ として得られる．P の曲率 (すなわち M の Levi–Civita 接続の曲率) を $A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) = A^2(\wedge^2 T^*M)$ の元 R と考えたとき，分解 $A^2(\wedge^2 T^*M) \cong A^2(\wedge^2{}_+ T^*M) \oplus A^2(\wedge^2{}_- T^*M)$ にのっとって

$$(3.31)\qquad R = R^+ + R^-$$

と分解すれば，$R^+ \in A^2(\wedge^2{}_+ T^*M) = A^2(P^+ \times_{Ad} \mathfrak{h})$ が P^+ に引きおこされた接続の曲率になっている．(2.12) の記号を使えば R^+ は

$$(3.32)\qquad R^+ = W^+ + \frac{\sigma}{12} I + {}^tK^+ \in A^2(\wedge^2{}_+ T^*M)$$

と分解されるが，$A^2 = A^2{}_+ \oplus A^2{}_-$ に対応して R^+ は

$$(3.33)\quad W^+ + \frac{\sigma}{12} I \in A^2{}_+(\wedge^2{}_+ T^*M), \qquad {}^tK^+ \in A^2{}_-(\wedge^2{}_+ T^*M)$$

と分解される．したがって，R^+ が自己双対である必要十分条件は ${}^tK^+=0$ で与えられるが，これは (2.2) からわかるように，M のリーマン計量が Einstein 計量であるということにほかならない．P^- についても同様の考察をして，次のようにまとめることができる．

(3.34)　**定理**　次の三つの条件はたがいに同値である．

(i)　M の Levi-Civita 接続が P^+ に引きおこす接続が自己双対的である．

(ii)　M の Levi-Civita 接続が P^- に引きおこす接続が反自己双対的である．

(iii)　M の計量が Einstein 計量である．

以下の問題では M を向きのついた 4 次元コンパクト・リーマン多様体，P を M 上の主 G 束とする．

問題 3.1　P の特性数 $c(P,\beta)$ が正ならば，P には反自己双対的接続 (すなわち，$R_+=0$ となる接続) は存在しないことを示せ．同様に，$c(P,\beta)<0$ ならば，自己双対的接続は存在しない．

問題 3.2　$c(P,\beta)=0$ ならば，P の(反)自己双対的接続は平坦 (すなわち，曲率 $R=0$) であることを示せ．

§4.　モジュライ空間

向きのついた 4 次元コンパクト・リーマン多様体 M 上に，コンパクト Lie 群 G を構造群とする主ファイバー束 P を一つ固定する．$\mathscr{C}$ を P の接続の全体，$\mathscr{G}$ を P のゲージ変換全体のつくる群とする (5 章 §1, §2, §3 参照)．

$\mathscr{C}^+$ を P の自己双対的接続全体の集合とする．$\mathscr{G}$ は $\mathscr{C}$ に作用しているが (5 章 §3 参照)，そのとき $\mathscr{C}^+$ を $\mathscr{C}^+$ に移していることは明らかであろう．実際，$\varphi\in\mathscr{G}$ が接続 ω を $\varphi^*\omega$ に移し，その曲率 Ω を $\varphi^*\Omega$ に移すとき，Ω が

$A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$の元として自己双対的ならば$\varphi^* \Omega$も$A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$の自己双対的な元であることは，$\varphi$が$M$に恒等変換を引きおこしていることから明白である．

ゲージ変換でたがいに移り合う接続は本質的に同じものであるという考えから，商空間 $\mathscr{M}^+ = \mathscr{C}^+/\mathscr{G}$ をP上の **自己双対接続のモジュライ空間** (moduli space of self-dual connections) と呼ぶ．

モジュライ空間$\mathscr{M}^+$の次元を求めるために$\mathscr{C}^+$の接空間と$\mathscr{G}$の軌道の接空間を決定する．$\mathscr{C}^+$は空でないと仮定し，その元 $\omega \in \mathscr{C}^+$ を一つ固定する．そしてω_tを$\mathscr{C}^+$内の曲線で $\omega = \omega_0$ とする． ωの曲率をΩ, ω_tの曲率をΩ_tとする．差 $\alpha_t = \omega_t - \omega$ は $A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ の元で (§1 参照),

(4.1)
$$\alpha = \frac{d}{dt}\alpha_t\Big|_{t=0} \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$$

とおけば，αは曲線ω_tの $t=0$ における接ベクトルと考えられる．Ω_tは

(4.2)
$$\Omega_t = d\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t = \Omega + D\alpha_t + \alpha_t \wedge \alpha_t$$
$$(D\alpha_t = d\alpha_t + \omega \wedge \alpha_t + \alpha_t \wedge \omega)$$

と書けるから，$\alpha_0 = 0$ に注意して

(4.3)
$$\frac{d}{dt}\Omega_t\Big|_{t=0} = D\alpha$$

を得る．各ω_tが自己双対的，すなわち $\Omega_t \in A^2{}_+(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ であるから，$D\alpha \in A^2{}_+(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ となる．分解

(4.4)
$$A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) = A^2{}_+(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \oplus A^2{}_-(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$$

による射影　$p_- : A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to A^2{}_-(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$　を使って

(4.5)
$$p_- D\alpha = 0$$

と書いておくと便利である．$A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ を$\mathscr{C}$のωにおける接空間$T_\omega(\mathscr{C})$と考えたとき，$\mathscr{C}^+$の接空間$T_\omega \mathscr{C}^+$は

(4.6)
$$T_\omega \mathscr{C}^+ = \{\alpha \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})\,;\, p_- D\alpha = 0\}$$

で与えられることがわかった．

次にωを通る$\mathscr{G}$の軌道$\mathscr{G}(\omega)$の接空間$T_\omega(\mathscr{G}(\omega))$を求めるために，$P \times_{Ad} \mathfrak{g}$の切断 $a \in A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ をとり，aにより生成される1助変数群 $\varphi_t = e^{ta} \in$

$\mathscr{G}$（5章 §2参照）による軌道の接ベクトルを計算すればよい．簡単のためベクトル束 E の場合を考えてみると，共変微分 ∇ は e^{ta} により $e^{-ta}\circ\nabla\circ e^{ta}$ に移る（5章 (3.3) 参照）から，$\xi\in A^0(E)$ に対し

$$e^{-ta}\circ\nabla\circ e^{ta}\xi = e^{-ta}(\nabla(e^{ta}\xi)) = t\nabla a\cdot\xi+\nabla\xi$$

を t で微分して

$$\frac{d}{dt}(e^{-ta}\circ\nabla\circ e^{ta}\xi) = Da\cdot\xi \tag{4.7}$$

を得る．したがって，軌道 ∇^{φ_t} の $t=0$ における接ベクトルは Da で与えられる．一般の主 G 束 P の場合にも，例えば5章の (3.13) を使って同様の結果を得る．接空間 $T_\omega(\mathscr{G}(\omega))$ はしたがって

$$T_\omega(\mathscr{G}(\omega)) = \{Da\,;\,a\in A^0(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\} \tag{4.8}$$

で与えられる．(4.6) と (4.8) を眺めることにより次のような列を考えるのが自然である．

$$\begin{aligned}&0\longrightarrow A^0(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\xrightarrow{d_0}A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\\&\xrightarrow{d_1}A^2{}_-(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\longrightarrow 0,\\&d_0=D,\qquad d_1=p_-\circ D.\end{aligned} \tag{4.9}$$

ここで，$d_1\circ d_0=p_-\circ D\circ D=p_-\circ R$ で，曲率 $R\in A^0(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ が自己双対的であることから $d_1\circ d_0=0$ を得る．これは

$$\mathrm{Ker}(d_1)=d_1{}^{-1}(0)=T_\omega\mathscr{C}^+,\qquad (4.6) \tag{4.10}$$

$$\mathrm{Im}(d_0)=d_0(A^0(P\times_{Ad}\mathfrak{g}))=T_\omega(\mathscr{G}(\omega))\qquad (4.8) \tag{4.11}$$

と $\mathscr{G}(\omega)\subset\mathscr{C}^+$ という事実からも当然予測できることである．(4.6) と (4.8) により，複体 (4.9) の第1コホモロジー

$$H^1=\mathrm{Ker}(d_1)/\mathrm{Im}(d_0)=T_\omega\mathscr{C}^+/T_\omega(\mathscr{G}(\omega)) \tag{4.12}$$

がモジュライ空間 $\mathscr{M}^+$ の接平面 $T_\omega(\mathscr{M}^+)$ と考えられる．

ここでコホモロジー H^0, H^2 を調べてみる．

$$H^0=\{a\in A^0(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\,;\,Da=0\} \tag{4.13}$$

はベクトル束 $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ の平行な切断のつくる空間である．

$H^2=A^2_-(P\times_{Ad}\mathfrak{g})/\mathrm{Im}(d_1)$ は $\mathrm{Im}(d_1)$ の直交補空間，すなわち d_1 の随伴作用素 $d_1{}^*$ の核 $\mathrm{Ker}(d_1{}^*)$ に同型である．$d_1{}^*=D^*\circ p_-{}^*$，そして $p_-{}^*$：$A^2_-(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\to A^2(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ が自然な埋めこみであることから

(4.14)
$$H^2\cong\{\psi\in A^2_-(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\;;\;D\psi=0\}.$$

$\psi\in A^2_-(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ に対しては $*\psi=-\psi$ であるから，条件 $D\psi=0$ は $D^*\psi=0$ と同値である．したがって，$\Delta=DD^*+D^*D$ とおけば，条件 $D\psi=0$ は $(\Delta\psi,\psi)=(D\psi,D\psi)+(D^*\psi,D^*\psi)=0$ と同値である．よって

(4.15)
$$H^2\cong\{\psi\in A^2_-(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\;;\;\Delta\psi=0\}$$

を得る．(4.15) を使って $H^2=0$ となる十分条件を求める．5章 (5.8) の記号を使って，

(4.16)　**補題**　$\psi=\frac{1}{2}\sum b_{jk}\theta^j\wedge\theta^k\in A^2_-(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$，そして $\frac{1}{2}\sum F_{jk}\theta^j\wedge\theta^k\in A^2_+(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$　ならば

$$\sum_{i,j,k=1}^{4}(b_{ik}F_{ji}-F_{ji}b_{ik},\ b_{jk})=0$$

証明　i,j,k がたがいに相異なる項以外は 0 になるから，24 項だけ考えればよい．$F_{43}=-F_{34}=-F_{12}$（自己双対），$b_{13}=-b_{42}$（反自己双対），と $b_{23}=-b_{32}$ から

$$(b_{23}F_{12}-F_{12}b_{23},\ b_{13})=-(b_{32}F_{43}-F_{43}b_{32},\ b_{42}).$$

このようにして 24 項すべてがたがいに消し合う．

(4.17)　**補題**　$\psi=\frac{1}{2}\sum b_{jk}\theta^j\wedge\theta^k\in A^2_-(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ で，M が自己双対的，すなわち，$\frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\theta^k\wedge\theta^l\in A^2_+$ ならば

$$\sum(b_{ih}R_{ihjk},\ b_{jk})=\frac{\sigma}{12}\sum(b_{in},b_{in}),$$

$$\sum(b_{ik}R_{ij},\ b_{jk})=\frac{\sigma}{4}\sum(b_{in},b_{in}).$$

ただし，ここで $\sigma=\sum R_{ii}$ は M のスカラー曲率．

証明 M の曲率を (2.12) の形に書く. $W^- = 0$ という仮定と ϕ は $\wedge^2{}_- V$ の元に相当することから, 一番目の式を得る. 同様に (3.12) から

$$\sum (b_{ij} K_{ijkl},\ b_{kl}) = 0$$

ここで K_{ijkl} に (2.2) を代入して計算すれば第二の式を得る.

以上の二つの補題から次の補題を得る.

(4.18) **補題** M が自己双対, P の接続も自己双対, そして $\phi = \frac{1}{2}\sum b_{jk}\theta^j \wedge \theta^k \in A^2{}_-(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ ならば

$$(\Delta\phi, \phi) = \frac{1}{2}\sum(-b_{jk,i,i},\ b_{jk}) + \frac{5\sigma}{24}\sum (b_{jk},\ b_{jk}).$$

上の補題と同じ仮定の下で

$$\begin{aligned}\Delta(\sum (b_{jk}, b_{jk})) &= 2\sum (b_{jk,i,i},\ b_{jk}) + 2\sum (b_{jk,i},\ b_{jk,i}) \\ &= -4(\Delta\phi, \phi) + 2\sum (b_{jk,i},\ b_{jk,i}) + \frac{5\sigma}{6}\sum (b_{jk},\ b_{jk}).\end{aligned}$$

上式を M 上で積分して

$$0 = -4\int (\Delta\phi, \phi) + 2\|\nabla\phi\|^2 + \frac{5\sigma}{6}\|\phi\|^2. \tag{4.19}$$

これから次の命題を得る.

(4.20) **命題** M が自己双対で, P の接続も自己双対とする.

(i) M のスカラー曲率 $\sigma \geqq 0$ ならば

$$H^2 = \{\phi \in A\,;\ \nabla\phi = 0\}.$$

(ii) M のスカラー曲率 $\sigma \geqq 0$ で, かつどこかで $\sigma > 0$ ならば

$$H^2 = 0.$$

(4.13) と (4.20) により, いくつかの大切な場合に H^0, H^2 を決定できる. 一方, Atiyah–Singer の指数定理によれば解析的指数 $\dim H^0 - \dim H^1 + \dim H^2$ は M の特性類, ベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ の特性類によって表わされる位相的指数に等しい. したがって, $\dim H^0, \dim H^2$ が知れている場合には, H^1

を M と $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ の位相不変量で書くことができる.

複体 (4.9) の場合，Atiyah-Singer の指数公式は

$$\text{(4.21)}\qquad \dim H^0-\dim H^1+\dim H^2 = -2p_1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})+\frac{1}{2}(\chi-\tau)\dim\mathfrak{g}$$

で与えられることが知られている. ここで, $p_1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ はベクトル束 $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ の第1 Pontrjagin 数(すなわち, 第1 Pontrjagin 類を M 上で積分したもの), χ は M の Euler 数, τ は M の **符号数** (signature) とか **指数** (index) と呼ばれる数で, 次のように定義される. M の2次元 (de Rham) コホモロジー群 $H^2(M)$ に外積を使って, 対称双線形形式 $f: H^2(M)\times H^2(M)\to \boldsymbol{R}$ を $f(\alpha,\beta)=\int_M\alpha\wedge\beta$ と定義し, $H^2(M)$ の基を適当にとり f を対角化したとき, $\tau=$ (正の項の数) $-$ (負の項の数) を M の符号数という.

例えば, M を4次元の単位球 S^4 とする. $\chi=2$, $\tau=0$ である. S^4 は共形的に平坦だから, 自己双対, スカラー曲率 σ は正. したがって, 自己双対な P の接続に対しては複体 (4.9) の H^2 は (4.20) により0である.

次に (4.13) を使って H^0 を決定するために, $G=U(r)$ の場合を例として考えてみる. 内積 h をもった複素ベクトル束 E に同伴する主 G 束としての P を考えれば, $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ は (E,h) の歪対称な自己準同型束 $\mathrm{End}(E,h)$ にほかならない. その切断 $\varphi\in\Gamma(\mathrm{End}(E,h))$ が平行ならば, φ は M の1点 x での歪対称自己準同型 $\varphi_x\in\mathrm{End}(E_x,h)$ によってきまり, φ_x は x を基点とするホロノミー群 Ψ_x の各元と可換でなければならない. 逆にそのような φ_x は平行移動により $\mathrm{End}(E,h)$ の平行な切断 φ に拡張される. したがって, H^0 は Ψ_x の各元と可換な $\mathrm{End}(E_x,h)$ の元の全体と同型になる. ホロノミー群 Ψ_x が既約ならば (特に $\Psi_x=U(r)$ ならば),

$$H^0=\{iaI\in\mathrm{End}(E_x,h)\ ;\ a\in\boldsymbol{R}\}$$

で $\dim H^0=1$ となる.

$G=SU(r)$ の場合には, $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ は跡 (trace) が0の $\mathrm{End}(E,h)$ の元から

なる. $iaI \in \mathrm{End}(E_x, h)$ で跡が0の元は0に限るから，ホロノミー群 Ψ_x が既約ならば (特に $\Psi_x = SU(r)$ ならば)，

$$H^0 = 0$$

である.

同様に，$G = SO(r)$ でホロノミー群 Ψ_x が $SO(r)$ に一致するならば $H^0 = 0$ を得る.

一般の G の場合，ホロノミー群 $\Psi_x \subset G$ に対し

$$H^0 \cong \{X \in \mathfrak{g}\,;\, aXa^{-1} = X,\ \ \forall a \in \Psi_x \subset G\} \tag{4.22}$$

となる. したがって，例えば $\mathfrak{g}$ が半単純で $\Psi_x = G$ ならば

$$H^0 = 0$$

である.

ここで，一般の Atiyah–Singer の指数定理から (4.21) を導いておこう. まず (4.9) が楕円複体であることを確かめておく. すなわち，各点 $x \in M$ の 0 でない $\xi \in T_x{}^*M$ に対し，x 上のファイバーからなる (4.9) の表象系列 (symbol sequence)

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\sigma(d_0,\xi)} \mathfrak{g} \otimes T_x{}^*M \xrightarrow{\sigma(d_1,\xi)} \mathfrak{g} \otimes \wedge^2{}_- T_x{}^*M \longrightarrow 0 \tag{4.23}$$

が完全系列になる. ここで表象 (symbol) $\sigma(d_0, \xi)$, $\sigma(d_1, \xi)$ は

$$\begin{aligned} &\sigma(d_0,\xi)A = A \otimes \xi\,, && A \in \mathfrak{g}\,,\\ &\sigma(d_1,\xi)(A \otimes \eta) = A \otimes p_-(\eta \wedge \xi)\,, && A \otimes \eta \in \mathfrak{g} \otimes T_x{}^*M \end{aligned} \tag{4.24}$$

で与えられるから，系列

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{R} \xrightarrow{\sigma_0(\xi)} T_x{}^*M \xrightarrow{\sigma_1(\xi)} \wedge^2{}_- T_x{}^*M \longrightarrow 0\,, \tag{4.25}$$

$$\sigma_0(\xi)a = a\xi,\ \sigma_1(\xi)\eta = p_-(\eta \wedge \xi)\,,$$

が完全であることを確かめればよい. $\sigma_0(\xi)$ が単射なのは明らか. $\sigma_1(\xi) \circ \sigma_0(\xi) = 0$ も明らか. $\sigma_1(\xi)\eta = p_-(\eta \wedge \xi) = 0$ とする. $T_x{}^*M$ の正規直交基 $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ をえらぶとき $\xi = \theta^1$ としてさしつかえない. $\eta = \sum y_i \theta^i$ とすれば

$$\sigma_1(\xi)\eta = p_-(y_2\theta^2\wedge\theta^1 + y_3\theta^3\wedge\theta^1 + y_4\theta^4\wedge\theta^1)$$

$$= \frac{-1}{2}\{y_2(\theta^1\wedge\theta^2 - \theta^3\wedge\theta^4) + y_3(\theta^1\wedge\theta^3 - \theta^4\wedge\theta^2) + y_4(\theta^1\wedge\theta^4 - \theta^2\wedge\theta^3)\}.$$

したがって $\sigma_1(\xi)\eta = 0$ ならば，$y_2 = y_3 = y_4 = 0$．よって，$\eta = y_1\theta^1 = y_1\xi$．これで $\mathrm{Im}(\sigma_0(\xi)) = \mathrm{Ker}(\sigma_1(\xi))$ が証明された．$\dim \boldsymbol{R} - \dim T_x{}^*M + \dim\wedge^2{}_-T_x{}^*M = 1 - 4 + 3 = 0$ であるから，$\sigma_1(\xi)$ が全射であることもわかる．

一般に，n 次元コンパクト多様体 X 上に複素ベクトル束 $E_0, E_1, \cdots, E_m$ および微分作用素 $D_i : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_{i+1})$ $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$ が与えられていて

$$(4.26)\quad 0 \longrightarrow \Gamma(E_0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(E_1) \xrightarrow{D_1} \cdots \xrightarrow{D_{m-1}} \Gamma(E_m) \longrightarrow 0$$

が楕円複体とする．$H^p = \mathrm{Ker}\, D_p/\mathrm{Im}\, D_{p-1}$ と定義したとき，$\dim H^p < \infty$ で

$$(4.27)\quad \sum(-1)^p \dim H^p = (-1)^{n(n+1)/2}\frac{ch(\sum(-1)^i E_i)td(TX\otimes C)}{e(TX)}[X]$$

が指数定理である．この公式の意味，使い方を説明しながら，(4.27) から (4.21) を導いてみる (指数定理の使い方については [S] がよい入門書である)．

まず，X の Todd 類 $td(TX\otimes C)$ は $TX\otimes C$ の Chern 類 $c(TX\otimes C)$ により次のように表わされる．$c(TX\otimes C) = 1 + c_1 + \cdots + c_n$ (ただし，$c_i = c_i(TX\otimes C)$) を形式的に

$$(4.28)\quad c(TX\otimes C) = (1 + x_1)\cdots(1 + x_n)$$

と分解したとき，

$$(4.29)\quad td(TX\otimes C) = \prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1{}^2 + c_2) + \cdots$$

と定義する．

楕円複体 (4.9) を複素化 (すなわち C とテンソル積) して指数定理 (4.27) を適用する．簡単のために

$$\mathfrak{g}_P{}^C = P\times_{Ad}(\mathfrak{g}\otimes C), \qquad \wedge^j = \wedge^j(T^*M\otimes C),$$

$$\wedge^2{}_\pm = \wedge^2{}_\pm(T^*M\otimes C)$$

と書けば (4.9) の複素化は

$$(4.30)\quad 0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{g}_P{}^C) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{g}_P{}^C \otimes \wedge^1) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{g}_P{}^C \otimes \wedge^2{}_-) \longrightarrow 0$$

となる．これに指数定理を適用して次式を得る．

$$(4.31)\quad \sum_{p=0}^{2} (-1)^p \dim H^p = \frac{ch(\mathfrak{g}_P{}^C)\, ch(\wedge^0 - \wedge^1 + \wedge^2{}_-)\, td(TM \otimes C)}{e(TM)} [M].$$

まず，$ch(\wedge^0 - \wedge^1 - \wedge^2{}_-)$ を計算するために作用素 $*: \wedge^p \to \wedge^{4-p}$ を少々かえて，

$$(4.32)\quad \tau = i^{p(p-1)+2} * = -i^{p(p-1)} * : \wedge^p \longrightarrow \wedge^{4-p}$$

を考える．これは $\wedge^1$ および $\wedge^3$ 上では $** = -1$ となるが，$*$ の代わりに τ を使えば，すべての $\wedge^p$ 上で $\tau \circ \tau = 1$ となるからである．

$$(4.33)\quad \begin{aligned} \wedge^* &= \wedge^0 + \wedge^1 + \wedge^2 + \wedge^3 + \wedge^4, \\ \wedge^*{}_{-1} &= \wedge^0 - \wedge^1 + \wedge^2 - \wedge^3 + \wedge^4, \end{aligned}$$

$$\wedge^+ = \{\xi \in \wedge^*; \tau(\xi) = \xi\}, \qquad \wedge^- = \{\xi \in \wedge^*; \tau(\xi) = -\xi\}$$

とおけば

$$(4.34)\quad \begin{aligned} \wedge^+ &= \wedge^+ \cap (\wedge^0 + \wedge^4) + \wedge^+ \cap (\wedge^1 + \wedge^3) + \wedge^2{}_+, \\ \wedge^- &= \wedge^- \cap (\wedge^0 + \wedge^4) + \wedge^- \cap (\wedge^1 + \wedge^3) + \wedge^2{}_-. \end{aligned}$$

対応 $\xi + \tau(\xi) \leftrightarrow \xi - \tau(\xi)$ により次の同型対応を得る．

$$\wedge^+ \cap (\wedge^0 + \wedge^4) \longleftrightarrow \wedge^- \cap (\wedge^0 + \wedge^4),$$

$$\wedge^+ \cap (\wedge^1 + \wedge^3) \longleftrightarrow \wedge^- \cap (\wedge^1 + \wedge^3).$$

また，対応 $\xi \leftrightarrow \tau(\xi)$ により次の同型対応を得る．

$$\wedge^0 \longleftrightarrow \wedge^4, \qquad \wedge^1 \longleftrightarrow \wedge^3.$$

したがって

$$(4.35)\quad \wedge^- - \wedge^+ + \wedge^*{}_{-1} \cong 2(\wedge^0 - \wedge^1 + \wedge^2{}_-).$$

これを (4.31) に代入して

$$(4.36)\quad \sum (-1)^p \dim H^p = \frac{1}{2} \frac{ch(\mathfrak{g}_P{}^C)\, ch(\wedge^- - \wedge^+ + \wedge^*{}_{-1})\, td(TM \otimes C)}{e(TM)} [M]$$

ここで de Rham 複体の場合の指数定理から (詳細は [S])

$$\frac{ch(\wedge^*{}_{-1})\,td(TM\otimes C)}{e(TM)}=e(TM)\,. \tag{4.37}$$

また，Hirzebruch の指数定理 (すなわち，複体 $d+\delta:\Gamma(\wedge^+)\to\Gamma(\wedge^-)$ に対する指数定理) から (詳細は [S])

$$\frac{ch(\wedge^+-\wedge^-)\,td(TM\otimes C)}{e(TM)}=4+\frac{1}{3}p_1(M) \tag{4.38}$$

($p_1(M)$ は M の第1 Pontrjagin 類)

を得る．(4.37) と (4.38) を (4.36) に代入すると，(4.36) の右辺は次式

$$\frac{1}{2}\left\{\dim\mathfrak{g}+\frac{1}{2}c_1(\mathfrak{g}_P{}^C)^2-c_2(\mathfrak{g}_P{}^C)\right\}\left(-4+e(TM)-\frac{1}{3}p_1(M)\right) \tag{4.39}$$

を M 上で "積分" したものになる．したがって (4.39) を展開し，0次元の項を拾って4次元の項だけ集める．また，そのとき

$$c_1(\mathfrak{g}_P{}^C)=0\,,\qquad c_2(\mathfrak{g}_P{}^C)=-p_1(\mathfrak{g}_P)$$

を使い簡単にする．(一般の実ベクトル束 E に対して $c_1(E^C)=0$, $c_2(E^C)=-p_1(E)$ である (4章 §5参照))．その結果，(4.39) の積分として (4.21) の右辺，すなわち

$$\frac{1}{2}\dim\mathfrak{g}\left(e(TM)-\frac{1}{3}p_1(M)\right)-2p_1(\mathfrak{g}_P) \tag{4.40}$$

を得る．

$H^0=H^2=0$ の仮定のもとで，(4.36) と (4.40) から

$$\dim H^1=\left(2p_1(\mathfrak{g}_P)+\frac{1}{2}\dim\mathfrak{g}\left(\frac{1}{3}p_1(M)-e(TM)\right)\right)[M] \tag{4.41}$$

を得る．

例として，$G=SU(2)$ の場合を考える．C^2 をファイバーとするベクトル束 $E=P\times_G C^2$ の Chern 類 $c_2(E)$ と $\mathfrak{g}_P=P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ の Pontrjagin 類 $p_1(\mathfrak{g}_P)$ の間には次の関係がある (4章 問題5.1参照)．

$$p_1(\mathfrak{g}_p)=-4c_2(E) \tag{4.42}$$

いま，$k=-c_2(E)>0$ (正確には $-c_2(E)$ を M 上で積分したもの) とな

るような E に対しては

$$p_1(\mathfrak{g}_P) = 8k \tag{4.43}$$

となる．さらに $M = S^4$（4 次元球）とすれば（4.41）は

$$\dim H^1 = 8k - 3 \tag{4.44}$$

となる．これが自己双対接続のモジュライ空間（空でないとしたとき）の次元になるわけである．

以上，モジュライ空間の接空間となるべき H^1 を調べた．モジュライ空間 $\mathscr{M}^+ = \mathscr{C}^+/\mathscr{G}$ が Hausdorff 空間であることをみるために $\mathscr{C}/\mathscr{G}$ の Hausdorff 性を証明する．それには写像

$$\mathscr{C} \times \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{C} \times \mathscr{C}, \qquad (\omega, \varphi) \longmapsto (\omega, \varphi^*\omega)$$

が固有 (proper) であることを確かめればよい．そのため接続の列 $\omega_i \in \mathscr{C}$ とゲージ変換の列 $\varphi_i \in \mathscr{G}$ が与えられて，極限

$$\omega_\infty = \lim \omega_i \in \mathscr{C}, \qquad \omega_0 = \lim \varphi_i{}^*(\omega_i) \in \mathscr{C}$$

が存在するとき，φ_i の適当な部分列は，あるゲージ変換 φ_∞ に収束して，$\omega_0 = \lim \varphi_\infty{}^* \omega_\infty$ となることを証明すればよい．P の構造群 G がコンパクトであるから，点 $u_0 \in P$ に対し $\{\varphi_i\}$ の部分列をえらぶことにより極限 $u_0{}^* = \lim \varphi_i(u_0)$ が存在するとしてよい．φ_j はゲージ変換であるから，すべての $a \in G$ に対し

$$\varphi_i(u_0 a) = (\varphi_i(u_0))a \longrightarrow u_0{}^* a$$

となる．さて，$\varphi_\infty = \lim \varphi_i$ が定義されることを示そう．$x_0 = \pi(u_0) \in M$ から任意の点 $x \in M$ までの曲線 c を，接続 ω_i により u_0 を出発点とする水平な曲線 $\tilde{c}_i$ にもち上げる．$\omega_i \to \omega_\infty$ であるから $\tilde{c}_i \to \tilde{c}_\infty$ となる．（ここで，$\tilde{c}_\infty$ は ω_∞ による c のもち上げ.）同様に ω_0 を使って c を $v_0{}^*$ から出発する水平曲線 $\tilde{c}^*$ にもち上げる．$\varphi_i{}^*(\omega_i) \to \omega_0$，そして $\varphi_i(v_0) \to u_0{}^*$ であるから，$\varphi_i(\tilde{c}_i) \to \tilde{c}^*$．任意の点 $u \in P$ に対して $\varphi_\infty(u) = \lim \varphi_i(u)$ が存在することを示すために，x_0 から $x = \pi(u)$ への曲線 c をえらび，$\tilde{c}_\infty$ の終点を v とすれば，適当

な $a \in G$ に対し $u = va$ と書ける．$\tilde{c}_i$ の終点を v_i とすれば $\lim v_i = v$．また $\varphi_i(\tilde{c}_i)$ の終点は $\varphi_i(v_i)$ であるが，一方，$\varphi_i(\tilde{c}_i)$ は接続 $\varphi_i{}^*(\omega_i)$ に関する c の水平もち上げであり，$\varphi_i{}^*(\omega_i) \to \omega_0$ であることから $\lim \varphi_i(\tilde{c}_i) = \tilde{c}^*$ となり，$\tilde{c}^*$ の終点を v^* とすれば，$v^* = \lim \varphi_i(v_i)$ となる．したがって

$$\begin{aligned} \lim \varphi_i(u) &= \lim \varphi_i(va) = (\lim \varphi_i(v))a \\ &= (\lim \varphi_i(v_i))a = v^*a \end{aligned}$$

となるから，$\varphi_\infty(u) = v^*a$ によって φ_∞ が定義される．以上で $\mathscr{C}/\mathscr{G}$ が Hausdorff 空間になることがわかった．

自己双対な接続 $\omega_0 \in \mathscr{C}^+$ を一つ固定する．$[\omega_0] \in \mathscr{M}^+ = \mathscr{C}^+/\mathscr{G}$ を ω_0 によって代表されるモジュライ空間の点とする．そのとき，ω_0 に関して複体 (4.9) のコホモロジー H^0 と H^2 が 0 ならば $[\omega_0]$ の近傍で $\mathscr{M}^+$ は多様体で，その $[\omega_0]$ における接空間 $T_{[\omega_0]}\mathscr{M}^+$ は H^1 に自然に同型となることを証明しよう．しかし，もっと一般の結果を証明するため，差し当っては H^0, H^2 が 0 であるとは仮定しないで証明をはじめる．

まず複体 (4.9) の Laplace 作用素のうち $A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ に作用する部分 $\Delta = d_1 \circ d_1{}^*$ とそれに対応する Green 作用素 $G : A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to \Delta(A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}))$ を考える．$H : A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to \mathrm{Ker}(\Delta)$ を(調和)射影としたとき，

$$G \circ \Delta(\varphi) + H\varphi = \varphi, \qquad \varphi \in A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}), \tag{4.45}$$

$$G \circ \Delta = \Delta \circ G \tag{4.46}$$

である．これは de Rham 複体の場合と同様である (3章 §7参照)．この Green 作用素を使って**倉西写像** $\kappa : A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ を

$$\kappa(\alpha) = \alpha + d_1{}^* \circ G \circ p_-(\alpha \wedge \alpha), \qquad \alpha \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \tag{4.47}$$

と定義する．ここで $\mathfrak{g}$ を行列の Lie 環と考えて $\alpha \wedge \alpha$ と書いたが，そうでなければ $\frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha]$ と考えるべきである．また，以上のことは $A^i(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ を適当な Sobolev ノルムで完備化した Hilbert 空間上で行うべきであるが，ここでは大要を説明するため，そういうことは詳しく述べないことにする．

$\mathscr{C} \to \mathscr{C}/\mathscr{G}$ を大ざっぱに $\mathscr{G}$ を構造群とする主ファイバー束のように考え，ω_0 を通る局所切断を探す．ω_0 を通るファイバーは $\mathscr{G}$ の軌道 $\mathscr{G}(\omega_0)$ で，その接空間 $T_{\omega_0}(\mathscr{G}(\omega_0))$ は (4.8) で求めたように

$$(4.48) \qquad T_{\omega_0}(\mathscr{G}(\omega_0)) = \{d_0\alpha\,;\,\alpha \in A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})\} = \mathrm{Im}(d_0)$$

である．直交分解

$$(4.49) \quad A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(d_0) \oplus \mathrm{Ker}(d_0{}^*) = \mathrm{Im}(d_0) \oplus \mathrm{Im}(d_1{}^*) \oplus H^1$$

を念頭において，ω_0 における**スライス** (slice) $S_{\omega_0} \subset A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ を

$$(4.50) \qquad S_{\omega_0} = \mathrm{Ker}(d_0{}^*) : A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \longrightarrow A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$$

と定義する．そして $U \subset S_{\omega_0}$ を原点の充分小さい近傍とする．また W を $\mathscr{G}$ の単位元 $1_{\mathscr{G}}$ の充分小さい近傍とする．そのとき，ω_0 に対し $H^0 = 0$ ならば写像

$$(4.51) \qquad (\varphi, \omega) \in W \times U \longrightarrow \varphi^*\omega \in \mathscr{C}$$

は $W \times U$ から $\omega_0 \in \mathscr{C}$ の近傍への同相写像となる．証明は写像 (4.51) の $(1_{\mathscr{G}}, \omega_0) \in W \times U$ における微分写像

$$(4.52) \quad A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \oplus \mathrm{Ker}(d_0{}^*) \longrightarrow \mathrm{Im}(d_0) \oplus \mathrm{Ker}(d_0{}^*) = A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$$

が同型写像であることを示し，逆関数の定理を使えばよい．(もちろんこの場合，Sobolev のノルムで $A^i(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ を完備化しておく必要があるが，ここではそのような点は無視することにする．) (4.52) において，$A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ は $\mathscr{G}$ の Lie 環と考えたとき，その元 $a \in A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ が $\mathscr{C}$ に引きおこすベクトル場は $\omega_0 \in \mathscr{C}$ ではベクトル $d_0 a$ を与えることを (4.7) で示した．したがって，(4.52) の写像の $A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to \mathrm{Im}(d_0)$ の部分は d_0 にほかならないから，$H^0 = 0$ ならば (4.52) は同型写像である．

条件 $H^0 = 0$ は，$\mathscr{G}$ の Lie 環 $A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ が $\omega_0 \in \mathscr{C}$ の近傍で自由に作用していることである．すなわち，ω_0 を不変にする $\mathscr{G}$ の元のつくる部分群 $\mathscr{G}_{\omega_0} \subset \mathscr{G}$ の Lie 環が $H^0 = \mathrm{Ker}(d_0) \subset A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ であるから，$H^0 = 0$ というのは $\mathscr{G}_{\omega_0}$ が離散ということである．

一般に，$\mathscr{G}_{\omega_0}$ に対して次の命題を証明しておく．

(4.53)　**命題**　接続 ω_0 によって定義されるホロノミー群と，ω_0 を保つゲージ変換 $\varphi\in\mathscr{G}_{\omega_0}$ の作用は可換である．

証明　点 $u_0\in P$ を定め，u_0 を基点とする ω_0 のホロノミー群を $\Psi_{u_0}\subset G$ とする．u_t $(0\leqq t\leqq 1)$ を P 内の水平曲線で u_0 に始まり，終点 u_1 は u_0 と同じファイバーに含まれているとする．ホロノミー群 Ψ_{u_0} の定義により $u_1=u_0b$ $(b\in\Psi_{u_0})$ である．ゲージ変換 $\varphi\in\mathscr{G}_{\omega_0}$ は ω_0 を保つから，$\varphi(u_t)$ も水平曲線である．

$$\varphi(u_0)=u_0\cdot a_\varphi{}^{-1},\qquad a_\varphi\in G$$

によって表現 $\varphi\in\mathscr{G}_{\varphi_0}\to a_\varphi\in G$ を定義すると，曲線 $u_ta_\varphi{}^{-1}$ も水平であるから，$\varphi(u_t)=u_ta_\varphi{}^{-1}$ でなければならない．特に $\varphi(u_1)=u_1\cdot a_\varphi{}^{-1}$．ここで $u_1=u_0b$ を代入し $\varphi\in\mathscr{G}$ が $b\in G$ の作用と可換であることを使えば，
$u_0a_\varphi{}^{-1}b=\varphi(u_0)b=\varphi(u_0b)=\varphi(u_1)=u_1a_\varphi{}^{-1}=u_0ba_\varphi{}^{-1}$ を得る．すなわち，$a_\varphi{}^{-1}b=ba_\varphi{}^{-1}$．

表現 $\varphi\mapsto a_\varphi$ は，u_0 を変えると共役な表現に変わる．したがって $a_\varphi=1\in G$ であるかどうかは，u_0 のえらび方には無関係で，このことから表現 $\varphi\mapsto a_\varphi$ が忠実であることもわかる．その意味で $\mathscr{G}_{\omega_0}$ を G の部分群と考えると (4.53) は，$\mathscr{G}_{\omega_0}$ が $\Phi_{u_0}\subset G$ の中心化群 $C_G(\Psi_{u_0})$ に含まれるということである．($C_G(\Psi_{u_0})$ は Ψ_{u_0} のすべての元と可換な G の元の集まり．）実際は

$$\mathscr{G}_{\omega_0}=C_G(\Psi_{u_0})\tag{4.54}$$

となることを示そう．任意の元 $a\in C_G(\Psi_{u_0})\subset G$ に対し，$\varphi\in\mathscr{G}_{\omega_0}$ を次のように定義する．P の任意の点は u_0 に水平曲線で結ばれる点 v と G の元 c で，vc の形に書ける．そのとき

$$\varphi(vc)=va^{-1}c\tag{4.55}$$

と定義する．同じ点が $v'c'(=vc)$ とも書けるならば，$v'=vb$, $b\in\Psi_{u_0}$, であるから，$v'a^{-1}c'=vba^{-1}c'=va^{-1}bc'=va^{-1}c$．したがって (4.55) の定義は，$v,c$ のえらび方に関係しない．このようにして定義された φ が P のゲージ変換

であることは明らか．P の任意の水平曲線は，u_0 に水平曲線で結べるような水平曲線 v_t と適当な元 $c \in G$ により，$v_t c$ の形に書けるから，φ によって水平曲線 $v_t a^{-1} c$ に移る．したがって，φ は接続 ω_0 を保つ．

また部分群 $\mathscr{G}_{\omega_0} \subset \mathscr{G}$ はスライス $\omega_0 + S_{\omega_0} \subset \mathscr{C}$ を不変にする．すなわち，

$$\varphi^*(\omega_0 + \alpha) \in \omega_0 + S_{\omega_0}, \qquad \varphi \in \mathscr{G}_{\omega_0}, \ \alpha \in S_{\omega_0} \tag{4.56}$$

となる．$\varphi^* \omega_0 = \omega_0$ であるから，(4.56) は $\varphi^* \alpha \in S_{\omega_0}$，すなわち $d_0(\varphi^* \alpha) = 0$ と同値である．$d_0(\varphi^* \alpha) = 0$ を示すには，φ が ω_0 を保つことから φ が d_0 と可換になることに注意して $d_0(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d_0 \alpha) = 0$ とすればよい．

さて，次のような簡単な場合を考える．

(4.57)　**定理**　G をコンパクト，半単純な Lie 群とする．P の接続 ω_0 のホロノミー群 Ψ_{u_0} が充分大きく，その中心化群 $C_G(\Psi_{u_0})$ が G の中心 $C(G)$ と一致するならば，スライス S_{ω_0} の原点の充分小さい近傍 U をとれば射影

$$\omega_0 + U \subset \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}/\mathscr{G}$$

により，$\omega_0 + U$ は $[\omega_0] \in \mathscr{C}/\mathscr{G}$ の近傍に同相である．

(上の Ψ_{u_0} が充分大きいという条件は，Ψ_{u_0} が G で稠密なら満たされている．これは最も一般な (generic) 接続によって満たされる条件である．)

証明　(4.54) により $\mathscr{G}_{\omega_0} = C(G)$ で，もちろん有限群である．G の中心の元は P に右側から作用するとき，すべての接続を不変にする．したがって $\mathscr{G}/C(G)$ が $\mathscr{C}$ に自由に作用する．いいかえれば，G, P の代わりに $G/C(G)$, $P/C(G)$ を使えば，$\mathscr{C}$ は同じで，ゲージ変換群 $\mathscr{G}/C(G)$ は $\mathscr{C}$ に自由に作用し，$\mathscr{C}/\mathscr{G} = \mathscr{C}/(\mathscr{G}/C(G))$ である．(4.57) は (4.51) で与えられる対応の結果として得られる．

さて，$H^0 \neq 0$ の場合はどうなるのであろうか．$H^0 = 0$ ならば (4.52) が同型写像であるが，$H^0 \neq 0$ でも (4.52) は全射である．(これは，$d_0 : A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to \mathrm{Im}(d_0)$ が定義によって全射であるから明らか．H^0 は $\mathrm{Ker}(d_0)$ である．) したがって，(4.51) も (陰関数の定理により) $W \times U$ から $\omega_0 \in \mathscr{C}$

の近傍への全射となる．(4.56) によれば $\mathscr{G}_{\omega_0}$ はスライスを不変にするから次の結果を得る．

(4.58)　**定理**　G をコンパクトな Lie 群，ω_0 を P の接続，S_{ω_0} をそのスライスとする．S_{ω_0} の原点の充分小さい近傍 U をとれば，射影

$$\omega_0 + U \subset \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}/\mathscr{G}$$

により，$(\omega_0 + U)/\mathscr{G}_{\omega_0}$ は $[\omega_0] \in \mathscr{C}/\mathscr{G}$ の近傍に同相である．

ここで注意すべきは，$\mathscr{G}_{\omega_0} = C_G(\Psi_{u_0}) \subset G$ はコンパクトな Lie 群であるから，$\mathscr{G}_{\omega_0}$ で不変なように $U \subset S_{\omega_0}$ をえらぶことができる．また，$\overline{\mathscr{G}}_{\omega_0} = \mathscr{G}_{\omega_0}/C(G)$ とおけば $\overline{\mathscr{G}}_{\omega_0}$ は効果的に作用して $(\omega_0 + U)/\mathscr{G}_{\omega_0} = (\omega_0 + U)/\overline{\mathscr{G}}_{\omega_0}$ である．

いよいよ，自己双対接続のモジュライ空間 $\mathscr{C}^+/\mathscr{G}$ を考察することにする．自己双対接続 $\omega_0 \in \mathscr{C}^+$ を一つ固定したとき，任意の自己双対接続 $\omega = \omega_0 + \alpha$，$\alpha \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$，は $\Omega - \Omega_0 = D\alpha + \alpha \wedge \alpha$ が自己双対，すなわち

(4.59)
$$p_-(D\alpha + \alpha \wedge \alpha) = 0$$

という条件で定義される．したがって，$\omega_0 \in \mathscr{C}^+$ を固定すれば

(4.60)
$$\mathscr{C}^+ \cong \{\alpha \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})\ ;\ p_-(D\alpha + \alpha \wedge \alpha) = 0\}$$

という対応がつく．

(4.50) で定義したスライス $S_{\omega_0} \subset A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ と (4.60) の交わりを

(4.61)
$$S_{\omega_0}{}^+ = \{\alpha \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})\ ;\ d_0{}^*\alpha = 0,\ p_-(D\alpha + \alpha \wedge \alpha) = 0\}$$

と定義し，**自己双対スライス** (self-dual slice)，または，単に **スライス** と呼ぶことにする．U を S_{ω_0} の原点の小さい近傍とするとき，$S_{\omega_0}{}^+$ の原点の近傍 U^+ を

(4.62)
$$U^+ = U \cap S_{\omega_0}{}^+$$

と定義する．(4.57) から直ちに次の結果が得られる．

(4.63)　**定理**　G をコンパクト半単純 Lie 群で，P の自己双対接続 ω_0 のホロノミー群が (4.57) の意味で充分大きいとするならば，スライス $S_{\omega_0}{}^+$ の原点の充分小さい近傍 U^+ をとれば射影

$$\omega_0 + U^+ \subset \mathscr{C}^+ \longrightarrow \mathscr{C}^+/\mathscr{G}$$

により $\omega_0 + U^+$ は $[\omega_0] \in \mathscr{C}^+/\mathscr{G}$ の近傍に同相である．

スライス $S_{\omega_0}{}^+$ を理解するために (4.47) で定義した倉西写像 κ により，$S_{\omega_0}{}^+$ を $A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ に移すと

(4.64)　$\kappa(S_{\omega_0}{}^+) \subset H^1 = \{\beta \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})\ ;\ d_0{}^*\beta = 0,\ d_1\beta = 0\}.$

これを証明するために

$$\beta = \kappa\alpha = \alpha + d_1{}^* \circ G \circ p_-(\alpha \wedge \alpha)$$

とおく．まず，$d_0{}^* \circ d_1{}^* = (d_1 \circ d_0)^* = 0$ であるから，一般の $\alpha \in A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ に対し

$$d_0{}^*\beta = d_0{}^*\alpha + d_0{}^* \circ d_1{}^* \circ G \circ p_-(\alpha \wedge \alpha) = d_0{}^*\alpha\,.$$

したがって

(4.65)　$$d_0{}^*\beta = 0 \iff d_0{}^*\alpha = 0\,.$$

また，

$$\begin{aligned} d_1\beta &= d_1\alpha + d_1 \circ d_1{}^* \circ G \circ p_-(\alpha \wedge \alpha) = d_1\alpha + \Delta \circ G \circ p_-(\alpha \wedge \alpha) \\ &= d_1\alpha + G \circ \Delta \circ p_-(\alpha \wedge \alpha) = d_1\alpha + p_-(\alpha \wedge \alpha) - Hp_-(\alpha \wedge \alpha). \end{aligned}$$

したがって，もし $d_1\beta = Hp_-(\alpha \wedge \alpha) = 0$ ならば $d_1\alpha + p_-(\alpha \wedge \alpha) = 0$ である．逆に $d_1\alpha + p_-(\alpha \wedge \alpha) = 0$ ならば $d_1\beta = -Hp_-(\alpha \wedge \alpha)$ であるが

$$A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) = H^2 \oplus d_1(A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g}))$$

は直交分解であるから，$d\beta = -Hp_-(\alpha \wedge \alpha) = 0$ を得る．まとめて

(4.66)　$p_-(D\alpha + \alpha \wedge \alpha) = 0 \iff d_1\beta = Hp_-(\alpha \wedge \alpha) = 0\,.$

(4.65) と (4.66) から，(4.64) は直ちにわかるだけでなく

(4.67)　$$\alpha \in S_{\omega_0}{}^+ \iff \kappa(\alpha) \in H^1, \qquad Hp_-(\alpha \wedge \alpha) = 0$$

を得る．

一方，倉西写像 $\kappa: A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})\to A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ の原点における (Fréchet) 微分を計算すると

$$(4.68)\qquad \left.\frac{d\kappa}{d\alpha}\right|_0(\xi)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\kappa(t\xi)-\kappa(0))$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(t\xi+d_1{}^*\circ G\circ p_-(t\xi\wedge t\xi))=\xi$$

であるから恒等変換である．逆関数の定理により，κ は原点の近傍で微分同相写像である．その近傍での κ の逆写像を κ^{-1} と書き，$\beta=\kappa(\alpha)$ とおけば，(4.67) は原点の近傍で

$$(4.69)\quad \alpha\in S_{\omega_0}{}^+ \iff \beta\in H^1,\qquad Hp_-(\kappa^{-1}(\beta)\wedge\kappa^{-1}(\beta))=0$$

と書ける．$\beta\in H^1\longrightarrow Hp_-(\kappa^{-1}(\beta)\wedge\kappa^{-1}(\beta))\in H^2$ は H^1 の局所座標を適当にとれば2次式である．これにより (4.62) における $U^+\subset S_{\omega_0}{}^+$ が H^1 の原点の近傍 $V\subset H^1$ で2次式 $Hp_-(\kappa^{-1}(\beta)\wedge\kappa^{-1}(\beta))=0$ で定義される集合と微分同相になることがわかった．

自己双対接続 ω_0 に対して $H^2=0$ ならば，$Hp_-(\alpha\wedge\alpha)=0$ は当然成り立っているから，κ は $S_{\omega_0}{}^+$ の原点の近傍 U^+ と H^1 の原点の近傍の間の微分同相写像となる．したがって

(4.70)　**定理**　もし (4.63) において，ω_0 に対して $H^2=0$ ならば，自己双対接続のモジュライ空間 $\mathscr{C}^+/\mathscr{G}$ は $[\omega_0]$ の近傍で多様体になる．そしてその次元は $\dim H^1$ に等しい．

いまの場合，$H^1=0, H^2=0$ であるから $\dim H^1=-\dim H^0+\dim H^1-\dim H^2$ で，これは Atiyah-Singer の指数定理により接続には無関係で，束 $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ のトポロジーだけで定まる数である ((4.41) 参照)．

また $H^2=0$ となる十分条件は (4.20) で与えられている．特に M が通常の計量をもった S^4 とか P_2C の場合には $H^2=0$ である．

一般に ω_0 のホロノミー群がそれほど大きくない場合には (4.58) から次の結果を得る．

(4.71) **定理** G をコンパクトな Lie 群，ω_0 を P の自己双対接続，$S_{\omega_0}{}^+$ 自己双対スライスとする．$S_{\omega_0}{}^+$ の原点の充分小さい近傍 U^+ をとれば射影

$$\omega_0 + U^+ \subset \mathscr{C}^+ \longrightarrow \mathscr{C}^+/\mathscr{G}$$

により，$(\omega_0 + U^+)/\mathscr{G}_{\omega_0}$ は $[\omega_0] \in \mathscr{C}^+/\mathscr{G}$ の近傍に同相である．

接続 ω_0 を保つゲージ変換 $\varphi \in \mathscr{G}_{\omega_0}$ が共変外微分 D，その共役 D^*，Green 作用素 G 等と可換なことは明らかで，したがって，倉西写像 $\boldsymbol{\kappa}$ とも可換になる．(4.71) の $\omega_0 + U^+$ を $\boldsymbol{\kappa}$ によって H^1 に移し，$\boldsymbol{\kappa}(\omega_0 + U^+)/\mathscr{G}_{\omega_0}$ が $[\omega_0] \in \mathscr{C}^+/\mathscr{G}$ の近傍に同相であるということもできる．

§5. S^4 上の自己双対接続

4 章 §2 で 1 次元複素射影空間 $P_1\boldsymbol{C}$ に複素直線束 L を構成し，そこに接続を定義しその曲率を計算した．ここでは複素数体 $\boldsymbol{C}$ を 4 元数体 $\boldsymbol{H}$ でおきかえて同様の構成をする．V を $\boldsymbol{H}$ 上の 2 次元ベクトル空間としスカラーは右から作用するとする．一つ基をとれば V は $\boldsymbol{H}^2 = \{(q_0, q_1)\,;\, q_0, q_1 \in \boldsymbol{H}\}$ と同一視される．$\boldsymbol{H}^\times = \boldsymbol{H} - \{0\}$ は乗法群で $V^\times = V - \{0\}$ に右から自由に作用する．$V = \boldsymbol{H}^2$ としたときには，この作用は，$p \in \boldsymbol{H}^\times$ に対し

(5.1) $\quad (q_0, q_1) \in \boldsymbol{H}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow (q_0 p, q_1 p) \in \boldsymbol{H}^2 - \{(0,0)\}$

で与えられる．$P_1\boldsymbol{H} = V^\times/\boldsymbol{H}^\times$ を **1 次元の 4 元数射影空間** (quaternion projective line) と呼ぶ．$(q_0, q_1) \in \boldsymbol{H}^2 - \{(0,0)\}$ によって代表される $P_1\boldsymbol{H}$ の点を $[q_0, q_1]$ と書く．$P_1\boldsymbol{C}$ が S^2 に同相であるように $P_1\boldsymbol{H}$ は S^4 に同相である．$U_0 = P_1\boldsymbol{H} - \{[0,1]\}$ から $\boldsymbol{H}$ へ同相写像

(5.2) $\quad [q_0, q_1] \in U_0 \xrightarrow{\varphi_0} q_0{}^{-1} q_1 \in \boldsymbol{H}, \qquad (p \in \boldsymbol{H} \to [1, p] \in U_0)$

がある．また，$\boldsymbol{R}^5 = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}$ 内の単位球面 $S^4 = \{(p, a) \in \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}\,;\, p\bar{p} + a^2 = 1\}$ の北極 $N = (0, 1) \in S^4$ から立体射影により，同相写像

$$(5.3)\qquad p\in \boldsymbol{H}=U_0 \longrightarrow \left(\frac{2p}{p\bar{p}+1},\ \frac{p\bar{p}-1}{p\bar{p}+1}\right)\in S^4-\{N\}\subset \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{R}$$

を得る．$[0,1]$ を北極 N に対応させることにより，これは $P_1\boldsymbol{H}$ から S^4 への同相写像に拡張される．同様に $U_1=P_1\boldsymbol{H}-\{[1,0]\}$ に対しても同相写像

$$(5.4)\qquad [q_0,q_1]\in U_1 \xrightarrow{\varphi_1} q_1{}^{-1}q_0\in \boldsymbol{H}\qquad (p\in\boldsymbol{H}\to[p,1]\in U_1)$$

がある．$P_1\boldsymbol{H}$ は U_0 と U_1 で覆われ，(5.2) と (5.4) を局所座標系として使うことができる．$q_1{}^{-1}q_0=(q_0{}^{-1}q_1)^{-1}$ であるから，U_0 と U_1 の間の座標変換 $\varphi_1\circ\varphi_0{}^{-1}:\boldsymbol{H}^\times\to\boldsymbol{H}^\times$ は $p\mapsto p^{-1}$ によって与えられる．$p=x^1+x^2\boldsymbol{i}+x^3\boldsymbol{j}+x^4\boldsymbol{k}$ に対し，$p^{-1}=\dfrac{\bar{p}}{p\bar{p}}=\dfrac{1}{|p|^2}(x^1-x^2\boldsymbol{i}-x^3\boldsymbol{j}-x^4\boldsymbol{k})$ であるから，反転 $p\mapsto p^{-1}$ は $\boldsymbol{H}^\times$ の共形変換であることに注意しておく．また立体射影 (5.3) も $\boldsymbol{H}$ から $S^4-\{N\}$ への共形写像である．これは (5.3) の微分を計算し，S^4 のリーマン計量を $\boldsymbol{H}$ に引き戻すと

$$(5.5)\qquad \frac{4}{(|p|^2+1)^2}dp\cdot d\bar{p}$$
$$=\frac{4}{(|p|^2+1)^2}(dx^1dx^1+dx^2dx^2+dx^3dx^3+dx^4dx^4)\,.$$

すなわち $\boldsymbol{H}$ のユークリッド計量の $\dfrac{4}{(|p|^2+1)^2}$ 倍になることからわかる．したがって，共形的に不変な S^4 の性質を調べるには $\boldsymbol{H}$ で通常のユークリッド計量を使って調べても差しつかえない．

さて，$\boldsymbol{H}^2-\{(0,0)\}$ は $\boldsymbol{H}^\times=\boldsymbol{H}-\{0\}$ を構造群とする $P_1\boldsymbol{H}=S^4$ 上の主ファイバー束である．これに同伴する4元数の意味での直線束，すなわち，$\boldsymbol{H}$ をファイバーとするベクトル束 L を4章 §2 の複素直線束の場合と同様にして定義する．$\boldsymbol{H}^2$ をファイバーとする直積束 $P_1\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}^2$ の部分束として，L は $P_1\boldsymbol{H}$ の各点 $[q_0,q_1]$ において，1次元部分空間 $L_{[q_0,q_1]}=\{(pq_0,\ pq_1)\,;\ p\in\boldsymbol{H}\}\subset\boldsymbol{H}^2$ をファイバーとしてもつ．

また，$\boldsymbol{H}^2-\{(0,0)\}$ のコンパクトな部分多様体 $S^7=\{(q_0,q_1)\,;\,|q_0|^2+|q_1|^2=1\}$ と $\boldsymbol{H}^\times$ のコンパクトな部分群 $Sp(1)=\{p\in\boldsymbol{H}\,;\,|p|=1\}\cong S^3$ を考えれば，S^7 は $Sp(1)$ を構造群とする $P_1\boldsymbol{H}$ 上の主ファイバー束で，$\boldsymbol{H}^2-$

$\{(0,0)\}$ の部分束とみなせる．これは $S^3=\{(z_0,z_1)\in \boldsymbol{C}^2\,;\,|z_0|^2+|z_1|^2=1\}$ が，$U(1)=\{z\in \boldsymbol{C}\,;\,|z|=1\}\cong S^1$ を構造群とする $P_1\boldsymbol{C}$ 上の主束になっていることの類似である．群 $\boldsymbol{H}^\times$ の Lie 環が $\boldsymbol{H}$ であることは明白であろうが，$Sp(1)$ の Lie 環 $\mathfrak{sp}(1)$ は純虚 4 元数 $p=ai+bj+ck$ からなる実 3 次元の空間である．実際，$\bar{p}=-p$ だから p と $\bar{p}$ は可換で，$e^p\overline{e^p}=e^p\cdot e^{\bar{p}}=e^p\cdot e^{-p}=e^0=1$ となり $e^p\in Sp(1)$ となる．これは，複素数の場合 $U(1)$ の Lie 環が純虚数からなるのに類似している．

さて，直線束 L に接続を定義する．主束 $\boldsymbol{H}^2-\{(0,0)\}$ 上の 1 次形式として与えるのが便利である．

$$(5.6)\qquad \omega=\frac{1}{|q_0|^2+|q_1|^2}(\bar{q}_0dq_0+\bar{q}_1dq_1)$$

とおけば，ω が接続形式になることは容易に確かめられる．これを部分束 S^7 に制限してみると，$\bar{q}_0q_0+\bar{q}_1q_1=1$ だから

$$d\bar{q}_0q_0+d\bar{q}_1q_1=-(\bar{q}_0dq_0+\bar{q}_1dq_1)$$

となり，ω は S^7 で純虚な 1 次微分形式，すなわち Lie 環 $\mathfrak{sp}(1)$ に値をとる 1 次微分形式となる．よって，ω は $P_1\boldsymbol{H}$ 上の主 $Sp(1)$ 束 S^7 に接続を定義する．

主束 $S^7\to P_1\boldsymbol{H}$ の U_0 上の切断 $p\mapsto\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+|p|^2}},\dfrac{p}{\sqrt{1+|p|^2}}\right)$ により ω を U_0 に引き戻すと

$$(5.7)\qquad \omega_{U_0}=\frac{1}{1+|p|^2}\left(-\frac{1}{2}d(\bar{p}p)+\bar{p}dp\right)=\mathrm{Im}\left\{\frac{\bar{p}dp}{1+|p|^2}\right\}$$

を得る．曲率を U_0 で計算して次式を得る．

$$(5.8)\qquad \Omega_{U_0}=d\omega_{U_0}+\omega_{U_0}\wedge\omega_{U_0}=\frac{d\bar{p}\wedge dp}{(1+|p|^2)^2}.$$

$p=x^1+x^2i+x^3j+x^4k$ として $d\bar{p}\wedge dp$ を計算すると

$$\begin{aligned}(5.9)\qquad & d\bar{p}\wedge dp\\ &=(dx^1-dx^2i-dx^3j-dx^4k)\wedge(dx^1+dx^2i+dx^3j+dx^4k)\\ &=2\{(dx^1\wedge dx^2-dx^3\wedge dx^4)i+(dx^1\wedge dx^3-dx^4\wedge dx^2)j\\ &\qquad+(dx^1\wedge dx^4-dx^2\wedge dx^3)k\}.\end{aligned}$$

曲率 Ω_{U_0} は $\mathfrak{sp}(1)$ に値をとるから純虚であるが，(5.9) によっても裏づけされる．さらに (5.9) において，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ の係数となる2次微分形式は反自己双対であるから，ω によって与えられる接続は反自己双対的である．(ただし，ここで $S^4 = P_1\boldsymbol{H}$ の通常の計量と，$U_0 \cong \boldsymbol{H}$ のユークリッド計量 $\sum dx^i dx^i$ はたがいに共形的，また(反)自己双対性は共形変換で不変な概念であるから，曲率の反自己双対性を確かめるにあたり，U_0 のユークリッド計量を使ったことを注意しておく．) (5.6) で定義された接続を **Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin の反インスタントン**，または **BPST 反インスタントン** と呼ぶ．

ベクトル束 L のファイバーは四元数体上で1次元，複素数体上では2次元である．L を複素ベクトル束として，その Chern 類を計算する．これは純位相的方法でも可能であるが，ここでは曲率 (5.8) を使って $c_1(L), c_2(L)$ を求めておく．$Sp(1)$ は $SU(2)$ に同型であるが，その対応は $a_1 + a_2 j \in SU(2)$ ($a_1, a_2 \in \boldsymbol{C}$) を $\boldsymbol{H}$ 上に

$$z_1 + z_2 j \longmapsto (z_1 + z_2 j)(a_1 + a_2 j)\ ; \qquad z_1 + z_2 j \in \boldsymbol{H},\ z_1, z_2 \in \boldsymbol{C},$$

によって作用させることによって得られる．簡単な行列の計算で，対応は

$$(5.10)\qquad a_1 + a_2 j \in Sp(1) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

によって与えられる．Lie 環 $\mathfrak{sp}(1)$ と $\mathfrak{su}(2)$ の間の対応ももちろん同じであるが，Lie 環 $\mathfrak{sp}(1)$ の場合には $a_1 + a_2 j \in \mathfrak{sp}(1)$ において a_1 は純虚数であることを注意しておく．(5.8) の曲率 Ω (簡単のため添字 U_0 を省略する) を Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ に値をとる微分形式と考え，$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1{}^1 & \Omega_2{}^1 \\ \Omega_1{}^2 & \Omega_2{}^2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\Omega_1{}^1 = \frac{2}{(1+|p|^2)^2}(dx^1 \wedge dx^2 - dx^3 \wedge dx^4)\boldsymbol{i}\,,$$

$$(5.11)\quad \Omega_2{}^1 = \frac{2}{(1+|p|^2)^2}((dx^1 \wedge dx^3 - dx^4 \wedge dx^2) + (dx^1 \wedge dx^4 - dx^2 \wedge dx^3)\boldsymbol{i})$$

$$\Omega_2{}^2 = -\bar{\Omega}_1{}^1\,, \qquad \Omega_1{}^2 = -\bar{\Omega}_2{}^1$$

となる．$\mathrm{tr}(\Omega)=0$ であるから，$c_1(L)=0$，（これは，$H^2(S^4;\boldsymbol{Z})=0$ だから計算するまでもない．）(5.11) から簡単な計算で

$$c_2(L)=\frac{1}{8\pi^2}(\Omega_1{}^1\wedge\Omega_1{}^1+\Omega_2{}^1\wedge\Omega_1{}^2+\Omega_1{}^2\wedge\Omega_2{}^1+\Omega_2{}^2\wedge\Omega_2{}^2)$$
$$=\frac{6\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dx^4}{\pi^2(1+|p|^2)^4}$$

を得る．$|p|=r$ とおけば

$$\int_{\boldsymbol{R}^4}c_2(L)=\int_0^\infty\frac{6r^3\,dr}{\pi^2(1+r^2)^4}\int_{S^3}dA \qquad (dA\text{ は単位球面 }S^3\text{ の面積要素}).$$

3 次元単位球面の表面積は $2\pi^2$ であるから

$$(5.12)\qquad \int_{S^4}c_2(L)=\int_{\boldsymbol{R}^4}c_2(L)=1$$

を得る．

(4.44) で構造群を $G=SU(2)$ とする S^4 上の主束 P と，それに同伴する複素ベクトル束 $E=P\times_G\boldsymbol{C}^2$ が $k=-c_2(E)>0$ を満たすならば，P の自己双対接続のモジュライ空間 $\mathscr{C}^+/\mathscr{G}$ の次元が $8k-3$ となることを証明した．S^4 の向きを逆にすることにより，これは「$k=c_2(E)>0$ ならば，P の反自己双対接続のモジュライ空間 $\mathscr{C}^-/\mathscr{G}$ の次元は $8k-3$ である」ということもできる．

したがって，我々がいま考えている $P_1\boldsymbol{H}=S^4$ 上の主束 $P=S^7$ とそれに同伴するベクトル束 L の場合, P の反自己双対接続のモジュライ空間の次元は $8\cdot1-3=5$ である．

そこで BPST 反インスタントンを含む 5 次元の反自己双対接続の族を構成してみせる．$\boldsymbol{R}^+$ を正の実数の集合とする．各元 $(\lambda,u)\in\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{H}$ は変換

$$f_{(\lambda,u)}:(q_0,q_1)\in\boldsymbol{H}^2\longrightarrow(\lambda q_0,\ q_1-uq_0)\in\boldsymbol{H}^2$$

を定義するが，この変換を使って (5.6) の ω を動かして新しい接続

$$(5.13)\qquad \omega^{(\lambda,u)}=f_{(\lambda,u)}{}^*\omega$$

を得る．(5.7) の定義を拡張して，主束 $S^7\to P_1\boldsymbol{H}$ の切断

$$p \mapsto \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + |p-u|^2}},\ \frac{p-u}{\sqrt{\lambda^2 + |p-u|^2}} \right)$$

を用いて $\omega^{(\lambda,u)}$ を U_0 に引き戻すと，簡単な計算で

$$(5.14)\qquad \omega_{U_0}{}^{(\lambda,u)} = \frac{(\bar{p}^\lambda - \bar{u})dp - \dfrac{1}{2}d|p-u|^2}{\lambda^2 + |p-u|^2}$$

$$= \frac{(\bar{p}-\bar{u})dp - d\bar{p}(p-u)}{2(\lambda^2 + |p-u|^2)} = \mathrm{Im}\left(\frac{(\bar{p}-\bar{u})dp}{\lambda^2 + |p-u|^2} \right)$$

となる．この曲率は

$$(5.15)\qquad \Omega_{U_0}{}^{(\lambda,u)} = \frac{\lambda^2\, d\bar{p} \wedge dp}{(\lambda^2 + |p-u|^2)^2}$$

で与えられるから，接続 $\omega^{(\lambda,u)}$ は反自己双対である．相異なる (λ, u) に対応する接続 $\omega^{(\lambda,u)}$ が相異なる（ゲージ変換によっても同値とならない）ことを示すためにゲージ変換で不変な

$$(5.16)\qquad \mathrm{tr}(\Omega_{U_0}{}^{(\lambda,u)} \wedge \Omega_{U_0}{}^{(\lambda,u)})$$

$$= \frac{c\lambda^4}{(\lambda^2 + |p-u|^2)^4} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

を考える．（正の整数 c は $\mathfrak{sp}(1)$ の表現のしかたに依存するが，いまの場合これは重要でない．）　これをさらに $P_1\boldsymbol{H} = S^4$ の体積要素（(5.5) を参照）

$$(5.17)\qquad \frac{c'}{(1 + |p|^2)^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

で割って得られるスカラー

$$(5.18)\qquad h^{(\lambda,u)} = \frac{c''\lambda^4(1 + |p|^2)^2}{(\lambda^2 + |p-u|^2)^4}$$

を考えると便利である．$(\lambda, u) \neq (\lambda', u')$ ならば $h^{(\lambda,u)} \neq h^{(\lambda',u')}$ であるから $\omega^{(\lambda,u)}$ と $\omega^{(\lambda',u')}$ はゲージ変換によっても同値となり得ない．

逆に P の反インスタントンはゲージ変換により適当な $\omega^{(\lambda,u)}$ に同値になることが知られているが，その証明は代数幾何（特に $P_3\boldsymbol{C}$ 内の曲線の分類）を必要とするので，ここでは省略する．

問題の解答

第1章

問題 1.1 $E|_{U_\alpha}$が直積 $U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r$ となるような開集合 U_α $(\alpha \in A)$ で Mを覆う．Mがコンパクトだから有限個の U_αでよい．各αについて，$W_\alpha \subset \overline{W}_\alpha \subset U_\alpha$ でしかも $\bigcup_\alpha W_\alpha = M$ となるように開集合 W_αをとっておく．f_αを W_αでは1，U_αの外では0の C^∞ 関数とする．$\boldsymbol{R}^r$ の基に対応して $U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r$ の一次独立な切断 $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ をとれば，$f_\alpha\sigma_1, \cdots, f_\alpha\sigma_r$ は E の切断で W_α 上でいたるところ一次独立であるから，$f_\alpha\sigma_1, \cdots, f_\alpha\sigma_r$ $(\alpha \in A)$ によって張られる切断の空間を V とすればよい．V の次元は A の元の数を $|A|$ と書けば $r\cdot|A|$ である．

問題 1.2 Vを上のような有限次元ベクトル空間とする．Whitney の埋めこみ定理（n次元多様体は $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ に埋めこまれる）の証明を真似することにより（Vを適当な超平面に射影することを繰り返し）Vの次元を $n+r+1$ まで下げることができる．Whitney の定理の証明については適当な微分位相幾何の本を参照されたい．通常の Whitney の定理より難しい Whitney の定理（n次元多様体は $\boldsymbol{R}^{2n}$ に埋めこまれる）の証明を真似れば Vの次元を $n+r$ まで下げることができる．

問題 1.3 問題 1.1 のような Vをとり直積束 $M\times V$ を考える．各 $x\in M$ に対し $V'_x = \{\sigma \in V;\ \sigma(x) = 0\}$ と定義すれば V/V_x は r 次元．$E' = \bigcup_x V'_x$ と定義する．$E \cong \bigcup_x V/V'_x$ $(\sigma \in V \to \sigma(x) \in E_x$ が同型写像 $V/V_x \to E_x$ を引きおこす)，したがって，$E \oplus E' \cong M \times V$.

問題 2.1 これは大ていの多様体の入門書に証明されている．

$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^p\omega \wedge d\omega'$ $(p = \deg\omega)$ を使って次数の低い場合に帰するのが一証明法である．

問題 2.2 $\theta = \sum p_i dx^i$,　$d\theta = \sum dp_i \wedge dx^i$,

$$(d\theta)^n = n\,!\,dp_1 \wedge dx^1 \wedge dp_2 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dx^n$$

問題 3.1 N 上に n 次微分形式 ω_0 を一つ $\int_N \omega_0 = 1$ となるようにとり，$k = \int_M f^*\omega_0$ と定義する．ω を N 上の任意の n 次微分形式とする．$H^n(N\,;\,\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}$ であるから

$$\omega = a\omega_0 + d\theta \qquad (a \in \boldsymbol{R},\ \theta \text{は } n-1 \text{ 次微分形式})$$

と書ける．したがって

$$\int_M f^*\omega = a\int_M f^*\omega_0 + \int_M d(f^*\theta) = a\int_M f^*\omega_0 = ak = k\int_N a\omega_0 = k\int_N \omega\,.$$

次に k が整数であることを示す．$y \in N$ を f の正則値とする．(そのような y は Sard の定理により存在する．) $x \in f^{-1}(y)$ とすれば $df_x : T_xM \to T_yN$ は同型写像である．df_x が向きを保つか逆にするかにより $\mathrm{sign}\,(df_x)$ を $+1$ または -1 と定義する．そして $\deg(f\,;\,y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} \mathrm{sign}(df_x)$ とおく．M がコンパクトで f は x の近傍から y の近傍への同相写像であるから，$f^{-1}(y)$ は有限個の点 $x_1, \cdots, x_q$ しか含まない．y の近傍を V_y，f によって同相な x_i の近傍を U_{x_i} とする．ω が N 上の n 次微分形式ならば

$$\int_{U_{xi}} f^*\omega = \mathrm{sign}(df_{x_i})\int_{V_y} \omega$$

だから

$$\int_{f^{-1}(V_y)} f^*\omega = \deg(f\,;\,y)\int_{V_y} \omega$$

を得る．V_y の外で 0 になる ω を使えば

$$\int_M f^*\omega = \deg(f\,;\,y)\int_N \omega$$

となるから $k = \deg(f\,;\,y)$ で，k は整数である．

$\deg(f\,;\,y)$ が正則値で定数であることを直接証明すれば前半の議論は不要となる．また，de Rham コホモロジーと特異コホモロジー (singular cohomology) の間の同型が積分で与えられることを知っていれば，$f^* : H^n(N\,;\,\boldsymbol{R}) \to H^n(M\,;\,\boldsymbol{R})$ と $f^* : H^n(N\,;\,\boldsymbol{Z}) \to H^n(M\,;\,\boldsymbol{Z})$ を特異コホモロジーに対して考えることにより k が整数であることはすぐにわかる．

問題 4.1 (i) まず ω が n 次の微分形式の場合を考える．

$$\omega = f(x^1, \cdots, x^n)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

とする．Stokes の定理により $\int_U \omega = 0$ は必要条件である．逆に $\int_U \omega = 0$ を仮定す

る．ω が U の外で 0 であるから，一つの i に対し $|x^i|\geqq 1$ ならば $f(x^1,\cdots,x^n)=0$ である．$n-1$ 次微分形式を

$$\varphi = \left(\int_{-1}^{x^1} f(t,x^2,\cdots,x^n)\,dt\right)dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

$$\varphi_1 = \left(\int_{-1}^{1} f(t,x^2,\cdots,x^n)\,dt\right)dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$$

と定義すると

$$\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\varphi_1 = \int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\omega = 0.$$

n に関する帰納法で $x^2,\cdots,x^n$ にだけによる $n-2$ 次微分形式 ψ で $|x^2|<1,\cdots,|x^n|<1$ の外では 0 で $\varphi_1=d\psi$ となるものが存在する．$\rho=\rho(x^1)$ を $x^1<-1$ では 0, $x^1>1$ では 1 となる C^∞ の関数として

$$\theta = \varphi - d(\rho\psi)$$

とおけば，θ は U の外で 0 で $\omega=d\theta$ となる．θ のつくり方から ω がパラメターに滑らかによるときは θ も同じパラメターに滑らかにより，しかも ω があるパラメター値に対して 0 のときは θ もそのパラメター値に対しては 0 である．

(ii) まず $\boldsymbol{R}^2$ の上の 1 次微分形式 $\omega=f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy$ を例として考える．$d\omega=0$ であるから $f_y=g_x$ である$\left(\text{ここで } f_y \text{ は } \dfrac{\partial f}{\partial y},\ g_x \text{ は } \dfrac{\partial g}{\partial x} \text{ のこと}\right)$．

$$\theta(x,y) = \int_{-1}^{x} f(t,y)\,dt$$

と定義すれば $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=f(x,y)$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\displaystyle\int_{-1}^{x} f_y(t,y)\,dt=\int_{-1}^{x} g_x(t,y)\,dt=g(x,y)$ だから $d\theta=\omega$. $|y|\geqq 1$ なら $f(t,y)=0$ だから $\theta(x,y)=0$. $|x|\geqq 1$ とすると $\dfrac{\partial\theta(x,y)}{\partial y}=g(x,y)=0$ がすべての y に対して成り立ち，一方 $\theta(x,-1)=0$ だから $\theta(x,y)=0$ を得る．以上で，ω の台が $|x|<1$, $|y|<1$ に含まれていて $d\omega=0$ であれば，同じく，台が $|x|<1$, $|y|<1$ に含まれていて $\omega=d\theta$ となる θ の存在が証明された．(i) の場合と異なり，何も条件を必要としないのである．

(iii) $\deg\omega=p+1<n$ で $d\omega=0$ とする．このとき (ii) のように台が $|x^i|<1$ に含まれる θ で $\omega=d\theta$ となるものが存在することを示す．まず，

$$\omega = \omega' + \omega''\wedge dx^n$$

と書く．ここで ω' と ω'' は dx^n を含まない微分形式である．また

$$d = d' + \frac{\partial}{\partial x^n}dx^n$$

とおく．(d' は $x^1, \cdots, x^{n-1}$ を座標関数とし x^n をパラメターとしたときの外微分と思えばよい．)

$$0 = d\omega = d'\omega' + (-1)^{p+1}\frac{\partial\omega'}{\partial x^n} \wedge dx^n + d'\omega'' \wedge dx^n$$

だから $d'\omega' = 0$, $d'\omega'' = (-1)^p\frac{\partial\omega'}{\partial x^n}$ (ω' も ω'' も $x^1, \cdots, x^{n-1}$ に関する微分形式で x^n はパラメターとみなす)．そのとき同様に x^n をパラメターとする $x^1, \cdots, x^{n-1}$ に関する微分形式 θ' が存在して

$$d'\theta' = \omega'$$

と書けることを n に関する帰納法で示す．$\deg\omega = p+1 < n-1$ の場合は帰納法で当然のことである．$p+1 = n-1$ の場合は，帰納法を使うにあたり，(i) の場合の条件が満たされていることを確かめる必要がある．パラメター x^n を固定したとき，$|x^1| < 1, \cdots, |x^{n-1}| < 1$ で与えられる $n-1$ 次元の立方体を $U(x^n)$ と書くと Stokes の定理で

$$\int_{U(x^n)} d'\omega'' = 0\,.$$

一方 $d'\omega'' = (-1)^p\frac{\partial\omega'}{\partial x^n}$ だから

$$0 = \int_{U(x^n)}\frac{\partial\omega'}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x^n}\int_{U(x^n)}\omega'\,.$$

これと $\int_{U(-1)}\omega' = 0$ を合わせると $\int_{U(x^n)}\omega' = 0$ を得るから，(i) の結果が使えて帰納法が適用できる．

$$d\theta' = \omega' + \theta'' \wedge dx^n$$

と書けば

$$0 = dd\theta' = d'\omega' + (-1)^{p+1}\frac{\partial\omega'}{\partial x^n} \wedge dx^n + d'\theta'' \wedge dx^n$$

$$= -d'\omega'' \wedge dx^n + d'\theta'' \wedge dx^n$$

だから $d'(\omega'' - \theta'') = 0$. 再び帰納法で $\omega'' - \theta'' = d'\varphi$ と書ける．そして

$$\omega - d\theta' = \omega' + \omega'' \wedge dx^n - \omega' - \theta'' \wedge dx^n = d'\varphi \wedge dx^n = d\varphi \wedge dx^n = d(\varphi \wedge dx^n)$$

であるから

$$\theta = \theta' + \varphi \wedge dx^n$$

とおけばよい．

問題 5.1 $H^0(\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{R}$; $H^p(\boldsymbol{R}^n)=0$, $p>0$. (これは Poincaré の補題から)

$H^p{}_c(\boldsymbol{R}^n)=0$, $p<n$; $H^n{}_c(\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{R}$. (これは問題 4.1 の解から)

問題 5.2 $\omega\leftrightarrow c=\{c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\}$, $\omega'\leftrightarrow c'=\{c'_{\beta_0\cdots\beta_q}\}$, $\omega\wedge\omega'\leftrightarrow c''=\{c''_{\gamma_0\cdots\gamma_{p+q}}\}$

とすると

$$c''_{\gamma_0\cdots\gamma_{p+q}}=\frac{1}{(p+q+1)!}\sum\mathrm{sign}(\sigma)\,c_{\sigma(\gamma_0)\cdots\sigma(\gamma_p)}c'_{\sigma(\gamma_p)\cdots\sigma(\gamma_{p+q})}.$$

ここで和は $\{0,1,2,\cdots,p+q\}$ の置換 σ に関してである.

$\omega''=\omega\wedge\omega'$ とする. U_α 上で $\omega=d\omega_\alpha$, $\omega'=d\omega'_\alpha$ と書けば

$$\omega''=d\omega_\alpha\wedge\omega'=d(\omega_\alpha\wedge\omega')=d\omega''_\alpha\qquad(ここで\ \omega''_\alpha=\omega_\alpha\wedge\omega'),$$

$$\omega''_\beta-\omega''_\alpha=(\omega_\beta-\omega_\alpha)\wedge\omega'=\frac{1}{2}(\omega_\beta-\omega_\alpha)\wedge(d\omega'_\alpha+d\omega'_\beta)$$

$$=\frac{(-1)^{p-1}}{2}d((\omega_\beta-\omega_\alpha)\wedge(\omega'_\alpha+\omega'_\beta)),$$

$$\omega''_{\alpha\beta}=\frac{(-1)^{p-1}}{2}(\omega_\beta-\omega_\alpha)\wedge(\omega'_\alpha+\omega'_\beta)$$

とおく.

例えば $p=\deg\omega=1$ ならば $c_{\alpha\beta}=\omega_\beta-\omega_\alpha$ であるから

$$(*)\quad\omega''_{\beta\gamma}-\omega''_{\alpha\gamma}+\omega''_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\{c_{\beta\gamma}(\omega'_\beta+\omega'_\gamma)-c_{\alpha\gamma}(\omega'_\alpha+\omega'_\gamma)+c_{\alpha\beta}(\omega'_\alpha+\omega'_\beta)\}$$

$$(**)\qquad=\frac{1}{2}(-c_{\beta\gamma}\omega'_\alpha+c_{\alpha\gamma}\omega'_\beta-c_{\alpha\beta}\omega'_\gamma).$$

最後の等号は $c_{\beta\gamma}-c_{\alpha\gamma}+c_{\alpha\beta}=0$ を使って得る. (*) の右辺と (**) の 2 倍を加えて 3 で割れば (*) の左辺にもち論等しいから

$$\omega''_{\beta\gamma}-\omega''_{\alpha\gamma}+\omega''_{\alpha\beta}=\frac{1}{6}\{c_{\beta\gamma}(\omega'_\beta-\omega'_\alpha)+c_{\beta\gamma}(\omega'_\gamma-\omega'_\alpha)+\cdots\}.$$

もし, $q=\deg\omega'=1$ ならば $\omega'_\beta-\omega'_\alpha=c'_{\alpha\beta}$ であるから

$$c''_{\alpha\beta\gamma}=\omega''_{\beta\gamma}-\omega''_{\alpha\gamma}+\omega''_{\alpha\beta}$$
$$=\frac{1}{6}\{c_{\beta\gamma}c'_{\alpha\beta}+c_{\beta\gamma}c'_{\alpha\gamma}-c_{\alpha\gamma}c'_{\beta\alpha}-c_{\alpha\gamma}c'_{\beta\gamma}+c_{\alpha\beta}c'_{\gamma\alpha}+c_{\alpha\beta}c''_{\gamma\beta}\}.$$

もし, $q=\deg\omega'=2$ ならば $U_\alpha\cap U_\beta$ 上で

$$\omega'_\beta-\omega'_\alpha=d\omega'_{\alpha\beta}$$

とおいて同様の計算を続ける必要がある.

問題 6.1 (i) $F: I\times M\to N$ を f と g の間のホモトピーとする. すなわち, すべ

ての $x \in M$ に対し

$$f(x) = F(0, x), \qquad g(x) = F(1, x)$$

とする．$K: A^p(I \times M) \to A^{p-1}(M)$ を次のように定義する．$\omega \in A^p(I \times M)$ を dt を含まない ω_1, ω_2 を使って

$$\omega = \omega_1 + dt \wedge \omega_2$$

と書き

$$K\omega = \int_0^1 \omega_2 \, dt$$

と定義する．そして

$$L = K \circ F^*: \ A^p(N) \longrightarrow A^{p-1}(M)$$

とおいたとき

$$d \circ L + L \circ d = g^* - f^*$$

となることを証明すればよい．そのために $j_t: M \to I \times M$ を

$$j_t(x) = (t, x)$$

と定義すれば

$$f = F \circ j_0, \qquad g = F \circ j_1.$$

Poincaré の補題の証明から

$$d \circ K + K \circ d = j_1^* - j_0^*.$$

したがって

$$d \circ L + L \circ d = d \circ K \circ F^* + K \circ F^* \circ d = (d \circ K + K \circ d) \circ F^*$$
$$= (j_1^* - j_0^*) \circ F^* = g^* - f^*.$$

(ii)　例えば，2次元球面 $S^2 = \{x \in \boldsymbol{R}^3 \, ; \|x\| = 1\}$ の変換 $x \mapsto -x$ が $H^2(S^2)$ に引きおこす変換を考えれば充分である．

第2章

問題 1.1　$u \in E_x$ に対し $u = \xi_1(x) = \xi_2(x)$ となる二つの切断 $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(E)$ をとったとき $(\varphi\xi_1)(x) = (\varphi\xi_2)(x)$ となることを証明すればよい．$\xi = \xi_1 - \xi_2$ を考えることにより，$\xi(x) = 0$ ならば $(\varphi\xi)(x) = 0$ となることを証明すればよい．E_x の基になるような切断 $e_1, \cdots, e_r \in \Gamma(E)$ をとる（x から遠いところでは基になっていなくて

よい)．x の近傍 U で

$$\xi = f_1 e_1 + \cdots + f_r e_r$$

となるように $f_1, \cdots, f_r \in A^0(M)$ をとる．$\eta = \xi - f_1 e_1 - \cdots - f_r e_r$ とおけば η は U で 0 となる切断であるから，x で 0，U の外で 1 となる関数 f をえらべば $\eta = f\eta$ である．

$$\varphi(\xi) = \varphi(f_1 e_1 + \cdots + f_r e_r + f\eta) = f_1\varphi(e_1) + \cdots + f_r\varphi(e_r) + f\varphi(\eta)$$

で $f_1, \cdots, f_r, f$ はすべて x で 0 であるから，$\varphi(\xi)$ も x で 0 となる．

問題 1.2 $\varphi = \nabla' - \nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ に問題 1.1 の結果を応用すればよい．

問題 1.3 $K = L \otimes \eta_1{}^* \otimes \cdots \otimes \eta_s{}^*$，$L \in \Gamma(E^{(r,0)})$，$\eta_i{}^* \in \Gamma(E^*)$ の形をしているときを考えれば充分である．その場合

$$K(\xi_1, \cdots, \xi_s) = L \otimes \langle \eta_1{}^*, \xi_1 \rangle \cdots \langle \eta_s{}^*, \xi_s \rangle$$

だから (1.20) を使って

$$\begin{aligned}
&\nabla_X (K(\xi_1, \cdots, \xi_s)) \\
&\quad = \nabla_X L \otimes \langle \eta_1{}^*, \xi_1 \rangle \cdots \langle \eta_s{}^*, \xi_s \rangle + L \otimes \langle \nabla_X \eta_1{}^*, \xi_1 \rangle \cdots \langle \eta_s{}^*, \xi_s \rangle + \cdots \\
&\qquad + L \otimes \langle \eta_1{}^*, \xi_1 \rangle \cdots \langle \nabla_X \eta_s{}^*, \xi_s \rangle + L \otimes \langle \eta_1{}^*, \nabla_X \xi_1 \rangle \cdots \langle \eta_s{}^*, \xi_s \rangle + \cdots \\
&\qquad + L \otimes \langle \eta_1{}^*, \xi_1 \rangle \cdots \langle \eta_s{}^*, \nabla_X \xi_s \rangle \\
&\quad = (\nabla_X K)(\xi_1, \cdots, \xi_s) + K(\nabla_X \xi_1, \cdots, \xi_s) + \cdots + K(\xi_1, \cdots, \nabla_X \xi_s).
\end{aligned}$$

問題 2.1 $e_1, \cdots, e_r$ を与えられた標構，求める標構を $\sum a^i{}_1 e_i, \cdots, \sum a^i{}_r e_i$ とする．条件は微分方程式

$$0 = \nabla(\sum a^i{}_j e_i) = \sum da^i{}_j e_i + a^i{}_j \nabla e_i = \sum_i (da^i{}_j + \sum_k a^k{}_j \omega^i{}_k) e_i$$

で与えられる．行列で書けば

$$da + \omega a = 0.$$

その積分条件は，上式の外微分を計算し構造方程式 (2.11) と上式を使えば

$$0 = d^2 a + d\omega a - \omega \wedge da = (-\omega \wedge \omega + \Omega) a - \omega \wedge da = \Omega a$$

だから，$\Omega = 0$ で与えられる．

問題 2.2 $e_1, \cdots, e_r$ を局所標構とするとき

$$\begin{aligned}
D^2(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) &= D(De_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_r + \cdots + e_1 \wedge \cdots \wedge e_{r-1} \wedge De_r) \\
&= D^2 e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_r + \cdots + e_1 \wedge \cdots \wedge e_{r-1} \wedge D^2 e_r
\end{aligned}$$

(他の項は互に消し合うことに注意)．したがって

$$D^2(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) = \sum_j \Omega_1{}^j e_j \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_r + \cdots + \sum_j e_1 \wedge \cdots \wedge e_{r-1} \wedge \Omega_r{}^j e_j$$
$$= (\Omega_1{}^1 + \cdots + \Omega_r{}^r) e_1 \wedge \cdots \wedge e_r .$$

問題 3.1 例えば，$E \otimes E'$ の場合，

$$(g \otimes g')(\xi \otimes \xi', \ \eta \otimes \eta') = g(\xi, \eta) \cdot g'(\xi', \eta')$$

であるから

$$\begin{aligned} d((g \otimes g')(\xi \otimes \xi', \eta \otimes \eta')) &= d(g(\xi,\eta))g'(\xi',\eta') + g(\xi,\eta)d(g'(\xi',\eta')) \\ &= g(\nabla\xi,\eta)g'(\xi',\eta') + g(\xi,\nabla\eta)g'(\xi',\eta') \\ &\quad + g(\xi,\eta)g'(\nabla'\xi',\eta') + g(\xi,\eta)g'(\xi',\nabla'\eta) \\ &= (g \otimes g')(\nabla\xi \otimes \xi' + \xi \otimes \nabla'\xi', \ \nabla\eta \otimes \eta' + \eta \otimes \nabla'\eta'). \end{aligned}$$

問題 3.2 g を使って対応 $\xi \in E \to \xi^* \in E^*$ を

$$g(\xi, \eta) = \langle \xi^*, \eta \rangle, \qquad \eta \in E$$

によって定義する．$\eta \in E$ に $\eta^* \in E^*$ が対応するとき，

$$g^*(\xi^*, \eta^*) = g(\xi, \eta) = \langle \xi^*, \eta \rangle$$

によって g^* を定義する．$\xi, \eta \in \Gamma(E)$ とし $\xi^*, \eta^* \in \Gamma(E^*)$ を対応する切断とするとき

$$\begin{aligned} d(g^*(\xi^*, \eta^*)) &= d(g(\xi, \eta)) = d\langle \xi^*, \eta \rangle = \langle \nabla\xi^*, \eta \rangle + \langle \xi^*, \nabla\eta \rangle \\ &= g^*(\nabla\xi^*, \eta^*) + g^*(\xi^*, \nabla\eta^*) . \end{aligned}$$

問題 4.1 $G \to TG$ を G の各点に対し，その点でのゼロベクトルと定義すればよい．

問題 4.2 射影 $\pi : P \to M$ が射影 $\pi_* : TP \to TM$ を引きおこす．積 $\mu : G \times G \to G$ の引きおこす $\mu_* : TG \times TG = T(G \times G) \to TG$ によって TG が Lie 群であることはすでに知っている．G の P における作用 $\alpha : P \times G \to P$ が TG の TP における作用 $\alpha_* : TP \times TG = T(P \times G) \to TP$ を引きおこす．P は局所的には直積 $M \times G$ だから，$P = M \times G$ の場合に $TP = T(M \times G) = TM \times TG$ と直積となることから，TP が TM の主 TG 束であることがわかる．

問題 4.3 写像 $f : S \times H \to G$ を $(s, h) \mapsto sh$ によって定義する．原点 $(e, e) \in S \times H$ における f の微分 $f_* : T_eS \times T_eH \to T_eG$ は同型写像である．($f_*|_{T_eH}$ が単射なのは明らか．$f_*|_{T_eS}$ が単射なのは S が H と e で横断的であることによる)．したがって，逆関数の定理で $e \in H$ の近傍 $U \subset H$ と S を小さくとれば，$f : S \times U \to$

G は $S\times U$ から $e\in G$ の近傍への微分同相写像である．議論を簡単にするため，G に右不変な距離を入れ，$B_{2\delta}$ を $e\in G$ の 2δ–近傍とする．δ を充分小さくとり，$S_{2\delta}=B_{2\delta}\cap S$ は $B_{2\delta}$ で閉じているとする．また，$U=H\cap B_{2\delta}$，$U^{-1}=U$ としてよい．そのとき $f: S_\delta\times H\to G$ は $S_\delta\times H$ から $H\subset G$ の近傍への微分同相写像になることを示そう．

$(s,h),(s',h')\in S_\delta\times H$ で $sh=s'h'$ とすると $s=s'h'h^{-1}$．$s,s'\in S_\delta$ だから $h'h^{-1}\in B_{2\delta}$，したがって $h'h^{-1}\in U$．f は $S_{2\delta}\times U$ では 1 対 1 だから，$s=s'$，$h'h^{-1}=e$ となる．したがって，f は $S_\delta\times H$ でも 1 対 1．f_* が (e,e) で同型写像だから，S_δ が小さいとき $s\in S_\delta$ に対し (s,e) でも同型写像．$h\in H$ で平行移動することにより f_* は (s,h) でも同型写像となる．以上のことから $\pi: S_\delta\to G/H$ が S_δ から G/H の原点 H の近傍への同相写像になることがわかる．S_δ の微分構造を π で移すことにより G/H の原点の近傍に微分構造が入れられる．それを G の元で平行移動することにより G/H の他の点の近傍にも微分構造が入る．

G が G/H を底とする主 H 束になることは局所的に直積になること，すなわち，局所切断の存在だけ証明すれば充分であろう．G/H の原点の近傍では S が切断になる．S を G の元で動かすことにより他の点の近傍での切断を得る．

問題 4.4 $X=\begin{pmatrix} 0 & x \\ -{}^t x & 0\end{pmatrix}$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，の型の元を考え，充分小さい δ に対し，

$$S=\{\exp X\,;\,\sum x_i^2<\delta\}$$

としてもよいし

$$S=\{(I+X)(I-X)^{-1}\,;\,\sum x_i^2<\delta\}$$

としてもよい．

$e_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^{n+1}$（ここで，0 は $\boldsymbol{R}^n$ の 0 を表わす）とするとき，

$$U\in SO(n+1)\longrightarrow Ue_0\in S^n\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$$

が対応 $SO(n+1)/SO(n)\to S^n$ を引きおこすことを使って $SO(n+1)/SO(n)$ と S^n の同相の証明をすればよい．

問題 5.1 G を $P\times G'$ 上に

$$(u,s')s=(us,\rho(s)^{-1}s'),\qquad (u,s')\in P\times G',\ s\in G$$

により作用させ，

$$P'=(P\times G')/G$$

と定義する．G' の P' に対する作用は

$$[(u,s')]s'' = [(u,s's'')], \qquad (u,s') \in P \times G',\ s'' \in G''$$

で定義する．(ここで $[(u,s')]$ は (u,s') によって代表される P' の元である)．また，$\bar{\rho}$ は $\bar{\rho}(u) = [(u,e)]$ と定義すればよい．

次に，$X' \in T_{u'}P'$ が与えられたとき $u' = \bar{\rho}(u)s'$ となるような $u \in P$, $s' \in G'$ をえらぶ．$X \in T_uP$ と $X' \in T_{u'}P'$ は，M の同じ接ベクトルに射影されるように X をえらべば $V = X' - (\rho_*(X))s'$ は垂直ベクトルだから，適当な $A' \in \mathfrak{g}'$ をとれば $u'A'\ (= A'^*{}_{u'})$ に等しい．そのとき，

$$\omega'(X') = s^{-1}(\rho_*(\omega(X))s + A'$$

によって ω' を定義すればよい．$\rho_*\omega = \bar{\rho}^*\omega'$ を確かめるのは容易である．$\rho : G \to G'$ が単射であるときは，P は P' の部分束で，ω' は ω の拡張である．

問題 5.2 ω は $R_a{}^*\omega = (Ad\, a^{-1})\omega = a^{-1}\omega a\ (a \in G)$ という性質をもっている．分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ は $Ad\, H$ で不変だから

$$R_a{}^*\omega = a^{-1}\omega_{\mathfrak{h}}a, \qquad a \in H.$$

$A \in \mathfrak{g}$ に対し $\omega(A^*) = A$ だから，$A \in \mathfrak{h}$ に対し $\omega_{\mathfrak{h}}(A^*) = A$.

$G = SO(n+1)$，$H = SO(n)$ の場合，$\mathfrak{m}$ は

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ -{}^tx & 0 \end{pmatrix},\ x = (x^1, \cdots, x^n) \in \boldsymbol{R}^n \right\}$$

で与えられる．$SO(n+1)$ の Maurer–Cartan 形式を

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_0{}^0 & \theta_1{}^0 & \cdots & \theta_n{}^0 \\ \theta_0{}^1 & \theta_1{}^1 & \cdots & \theta_n{}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0{}^n & \theta_1{}^n & \cdots & \theta_n{}^n \end{pmatrix}$$

とするとき，$d\theta = -\theta \wedge \theta$ から

$$d\theta_j{}^i = -\sum_{k=1}^{n} \theta_k{}^i \wedge \theta_j{}^k - \theta_0{}^i \wedge \theta_j{}^0.$$

したがって曲率形式 Ω は

$$\Omega_j{}^i = -\theta_0{}^i \wedge \theta_j{}^0$$

で与えられる．

問題 6.1 (i) P が直積 $M \times G$ の場合を考えれば，TP/G のファイバーが $\boldsymbol{R}^n \times \mathfrak{g}$ であることがわかる．$r = \dim \mathfrak{g}$ とするとき，TP/G の構造群は $GL(n+r\,; \boldsymbol{R})$ に含

まれている．$GL(n+r;\boldsymbol{R})$ のどのような部分群になるかを調べるために，$\{U_\alpha\}$ を M の開被覆で各 U_α 上では P は直積 $U_\alpha \times G$ とする．簡単のため $U=U_\alpha$，$V=U_\beta$ と書き，変換関数 $\psi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ を ψ と書く．$x=(x^1,\cdots,x^n)$ と $y=(y^1,\cdots,y^n)$ を U と V における座標系，$\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$ と $\eta=(\eta^1,\cdots,\eta^n)$ を TU と TV のファイバーの座標とすると $\eta^i=\sum\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\xi^j$ という関係がある．$U\cap V$ 上では $P|_U \cong U\times G$ と $P|_V \cong V\times G$ は写像

$$(x,s) \longmapsto (y,\psi(x)s)$$

によって貼り合わされている．その微分

$$(x,\xi,s,A) \longmapsto \left(y,\frac{\partial y}{\partial x}\xi,\ \psi(x)\,s,\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\xi+\psi(x)\,A\right)\psi(x)^{-1}\right)$$

によって $TP|_{TU}\cong U\times \boldsymbol{R}^n \times G\times \mathfrak{g}$ と $TP|_{TV}\cong V\times \boldsymbol{R}^n\times G\times\mathfrak{g}$ は貼り合わされているから，$U\cap V$ 上における TP/G の変換関数は

$$\begin{pmatrix}\xi\\ A\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial x} & 0\\ * & Ad\,\psi(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ A\end{pmatrix}$$

によって与えられる．

(ii)
$$\alpha([(u,A)])=[uA], \qquad [(u,A)]\in P\times_{Ad}\mathfrak{g},$$
$$\beta([X])=\pi_* X, \qquad [X]\in TP/G.$$

系列の完全性を確かめるのは容易．

(iii) P の接続が水平部分空間で与えられているとする．$X\in T_xM$ に対し，水平接ベクトル $X^*\in T_uP$ をえらび $\gamma(X)=[X^*]\in TP/G$ とおけばよい．

逆に，分裂 $\gamma: TM\to TP/G$ が与えられたとき，$X\in T_uM$ の水平なもち上げ $X^*\in T_uP$ を $\gamma(X)=[X^*]\in TP/G$ という条件で定義する．$(aX+bY)^*=aX^*+aY^*$ を確かめるのは，X から X^* が一意的にきまることを使えばよい．

問題 9.1 いま，(7.5) の ξ を I_{TM} とすれば

$$\tilde{\xi}(X)=u^{-1}(X), \qquad X\in T_u(L(M))$$

だから，$\tilde{\xi}$ は (9.24) の θ と一致する．

問題 9.2 問題 1.2 の場合のように問題 1.1 の結果を使えば A_X がテンソル場であることがわかる．

$$A_X Y = L_X Y-\nabla_X Y=[X,Y]-\nabla_X Y=-(\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y])-\nabla_Y X$$

$$= -T(X, Y) - \nabla_Y X.$$

問題 9.3　(2) だけ証明する．(1) の証明も同様．$R(X, Y)W$ の代わりに $R(X, Y, W)$ と書くことにする．(1.3) の結果と $T(X, Y)$ の定義から

$$\mathfrak{S}(\nabla_X R)(Y, Z, W) = \mathfrak{S}\{\nabla_X(R(Y, Z, W) - R(\nabla_X Y, Z, W) - R(Y, \nabla_X Z, W) - R(Y, Z, \nabla_X W)\},$$

$$\mathfrak{S}R(T(X, Y), Z, W) = \mathfrak{S}\{R(\nabla_X Y, Z, W) - R(\nabla_Y X, Z, W) - R([X, Y], Z, W)\}.$$

ここで $R(Y, Z, W)$ 等を $\nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W$ 等でおき代え，Jacobi の恒等式を使えばすべての項が消し合って (2) を得る．

問題 9.4　例えば，1 次微分形式 ω の場合，1 章の (2.11) を使って

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \frac{1}{2}\{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{\nabla_X(\omega(Y)) - \nabla_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{(\nabla_X\omega)(Y) - \omega(\nabla_X Y) - (\nabla_Y\omega)(X) + \omega(\nabla_Y X) - \omega([X, Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{(\nabla_X\omega)(Y) - (\nabla_Y\omega)(X) - \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{(\nabla_X\omega)(Y) - (\nabla_Y\omega)(X)\}. \end{aligned}$$

問題 10.1　局所標構 $e_1, \cdots, e_n$ をとり $\left(例えば，\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n} を使って\right)$，$X = e_j$，$Y = e_k$，$W = e_l$，$Z = e_m$ として問題 9.3 の (2) に代入すればこの問題の (2) を得る．(1) も同様．

第３章

問題 1.1　点 $(0, 0, 1)$ と $(u, v, 0)$ を結ぶ線分 $(tu, tv, 1-t)$ が単位球面と交わる点を求めると $t = \dfrac{2}{u^2 + v^2 + 1}$．したがって

(i)　$x = \dfrac{2u}{u^2 + v^2 + 1}$，　$y = \dfrac{2v}{u^2 + v^2 + 1}$，　$z = \dfrac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$

上の式から，計算で

$$dx^2+dy^2+dz^2=\frac{4(du^2+dv^2)}{(u^2+v^2+1)^2}$$

問題 2.1 式 (2.5) の Y での値は

(i) $$Y\xi=d\xi(Y)=B(\xi,Y)+\nabla^{\perp}{}_Y\xi.$$

したがって

(ii) $$XY\xi=X(B(\xi,Y))+X(\nabla^{\perp}{}_Y\xi)$$
$$=\nabla_X(B(\xi,Y))+A(X,B(\xi,Y))+B(\nabla^{\perp}{}_Y\xi,X)+\nabla^{\perp}{}_X\nabla^{\perp}{}_Y(\xi).$$

式 (ii) の X と Y を入れかえたものとの差をとって

(iii) $$[X,Y]\xi=\nabla_X(B(\xi,Y))-\nabla_Y(B(\xi,X))+A(X,B(\xi,Y))$$
$$-A(Y,B(\xi,X))+B(\nabla^{\perp}{}_Y\xi,X)-B(\nabla^{\perp}{}_X\xi,Y)$$
$$+[\nabla^{\perp}{}_X,\nabla^{\perp}{}_Y]\xi.$$

式 (i) で Y を $[X,Y]$ でおきかえて

(iv) $$[X,Y]\xi=B(\xi,[X,Y])+\nabla^{\perp}{}_{[X,Y]}\xi.$$

式 (iii) と (iv) の法成分を比べて

(v) $$A(X,B(\xi,Y))-A(Y,B(\xi,X))+[\nabla^{\perp}{}_X,\nabla^{\perp}{}_Y]\xi=\nabla^{\perp}{}_{[X,Y]}\xi.$$

これが (2.25) である．接成分を比べると

$$\nabla_X(B(\xi,Y))-B(\nabla^{\perp}{}_X\xi,Y)-\nabla_Y(B(\xi,X))+B(\nabla^{\perp}{}_Y\xi,X)=B(\xi,[X,Y]).$$

ここで $\nabla_X(B(\xi,Y))=(\nabla^*{}_XB)(\xi,Y)+B(\nabla^{\perp}{}_X\xi,Y)+B(\xi,\nabla_XY)$ を使うと

$$(\nabla^*{}_XB)(\xi,Y)-(\nabla^*{}_YB)(\xi,X)+B(\xi,\nabla_XY-\nabla_YX)=B(\xi,[X,Y]).$$

したがって

(vi) $$(\nabla^*{}_XB)(\xi,Y)=(\nabla^*{}_YB)(\xi,X)$$

を得る．式 (vi) は (2.23) と同値である．

問題 3.1 $y\in S^n(r)\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ として

$$dy=\sum_{i=1}^{n}\theta^i e_i.$$

e_{n+1} を単位法ベクトル場とする (中心から外に向かうようにとる)． $S^n(r)$ の半径が r だから $y=re_{n+1}$ であることに注意すると

$$dy=r\,de_{n+1}=r\sum\omega_{n+1}{}^i e_i$$

であるから

$$\theta^i = r\omega_{n+1}{}^i,$$

したがって
$$\omega_i{}^{n+1} = -\frac{1}{r}\theta^i.$$

第二基本形式は

$$\sum_i \omega_i{}^{n+1}\theta^i e_{n+1} = -\frac{1}{r}\sum_i \theta^i\theta^i e_{n+1}$$

で与えられ，曲率形式は

$$\Omega_j{}^i = \omega_j{}^{n+1} \wedge \omega_{n+1}{}^i = -\frac{1}{r}\theta^j \wedge \frac{1}{r}\theta^i = \frac{1}{r^2}\theta^i \wedge \theta^j$$

で与えられる．

問題 4.1 $e_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ とおけば

$$\nabla_{e_j} e_k = \sum \Gamma^i{}_{jk} e_i$$

である（2 章の (9.19) 参照）．

$$\nabla_{e_i}(g(e_j, e_k)) = g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) + g(e_j, \nabla_{e_i} e_k)$$

から

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \sum g_{lk}\Gamma_{ij}{}^l + \sum g_{jl}\Gamma_i{}^l{}_k$$

を得る．したがって

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} = 2g_{li}\Gamma_j{}^l{}_k.$$

これから求める式は直ちに得られる．

問題 6.1 この解答は 6 章 §2 で与えられる．

問題 6.2 式 (5.23) に $R_{ij} = \dfrac{\sigma}{n}\delta_{ij}$ を代入し $W^i{}_{jkl} = 0$ とおけば

$$0 = R^i{}_{jkl} + \sigma(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ik})$$

を得る．

問題 7.1 計量 g に関する Hodge の $*$ 作用素に対し，g に共形な計量 $g' = \varphi^2 g$ に関する Hodge の作用素を $*'$ と書くことにする．m 次微分形式 α に対し $*\alpha = *'\alpha$ を証明すれば充分である．式 (5.2) のように $\theta'^i = \varphi\theta^i$ とするとき，$\alpha = \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_m}$ に

対して $*\alpha = *'\alpha$ を確かめればよい．例えば $\alpha = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^m$ とすると

$$*'\alpha = *'(\varphi^{-m}\theta'^1 \wedge \cdots \wedge \theta'^m) = \varphi^{-m}\theta'^{m+1} \wedge \cdots \wedge \theta'^{2m} = \theta^{m+1} \wedge \cdots \wedge \theta^{2m} = *\alpha\,.$$

第 4 章

問題 4.1 $c(E,\nabla) = \det\left(I - \dfrac{R}{2\pi i}\right)$ と $ch(E,\nabla) = \mathrm{tr}\left(\exp\left(-\dfrac{R}{2\pi i}\right)\right)$ を比べるわけだから，A を行列としたとき $\det(I+A)$ と $\mathrm{tr}(\exp A)$ の関係を調べればよい．適当な行列 P で PAP^{-1} が三角型になるようにできるから，A が三角型

$$(*) \qquad A = \begin{pmatrix} z_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & z_r \end{pmatrix}$$

になっているとしてよい．そのとき

$$\det(I+A) = \prod_{i=1}^{r}(1+z_j)\,, \quad \mathrm{tr}(\exp A) = \sum_{j=1}^{r} e^{z_j}$$

となる．

問題 4.2 上と同様にベクトル空間 V の基を $v_1, \cdots, v_r$, そのとき線形変換 $A : V \to V$ は三角型の行列 $(*)$ で与えられるとする．$\wedge^k V$ の基は $v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_k}$, $j_1 < \cdots < j_k$, で与えられ，A によって引きおこされる線形変換 $\wedge^k A : \wedge^k V \to \wedge^k V$ は三角型の行列で与えられ，対角線上の元は $z_{j_1} + \cdots + z_{j_k}, j_1 < \cdots < j_k$, である．あとは問題 4.1 の解答を使えばよい．

問題 5.1 $p_1(F) = -4c_2(E)$ を証明する．$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の基として

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

をとる．そのとき

$$ad\, e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ ad\, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ad\, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$c_1(E)$ を与える多項式は $X = \xi e_3 = \begin{pmatrix} i\xi & 0 \\ 0 & -i\xi \end{pmatrix}$ に対しては

$$\det\left(-\frac{X}{2\pi i}\right) = -\frac{\xi^2}{4\pi^2}\,.$$

$$ad\,X = \begin{pmatrix} 0 & -2\xi & 0 \\ 2\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ であるから，$p_1(F)$ を与える多項式は

$$-\frac{1}{4\pi^2}(-2\xi)(2\xi) = \frac{4\xi^2}{4\pi^2}$$

となる．

問題 6.1 $Z \in \mathfrak{u}(r)$ に対し $\det\left(-\dfrac{Z}{2\pi i}\right)$ を計算するにあたり，ユニタリ行列 U で UZU^{-1} が対角行列であるようにする．Z が対角化されたとして

$$Z = \begin{pmatrix} i\xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\xi_r \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(r)$$

の形をしているならば $\det\left(-\dfrac{Z}{2\pi i}\right) = \left(\dfrac{-1}{2\pi}\right)^r \xi_1\cdots\xi_r$ である．$\boldsymbol{C}^r$ を $\boldsymbol{R}^{2r}$ とみなすのに対応して $\mathfrak{u}(r)$ を $\mathfrak{so}(2r)$ の Lie 部分環とみなす．特に，上の Z は

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_1 & & & \\ \xi_1 & 0 & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\xi_r \\ & \text{\Large 0} & & \xi_r & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2r)$$

と表現される．Euler 類を定義する多項式は式 (6.4) の f を使うと $\dfrac{1}{(2\pi)^r r!}f$ である．$\tilde{Z}$ に対しては $f(\tilde{Z}) = (-1)^r r!\,\xi_1\cdots\xi_r$ であるから

$$\frac{1}{(2\pi)^r r!}f(\tilde{Z}) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^r \xi_1\cdots\xi_r = \det\left(-\frac{Z}{2\pi i}\right).$$

問題 6.2 $e(E)$ に対応する多項式が $\dfrac{1}{(2\pi)^m m!}f$ であるから，$e(E)^i$ に対応する多項式は

$$\frac{1}{(2\pi)^{2m}(r!)^2}f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}}(\xi_1\cdots\xi_m)^2, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & & & \\ -\xi_1 & 0 & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \xi_m \\ & \text{\Large 0} & & -\xi_m & 0 \end{pmatrix}.$$

一方，§5 の記号で

$$q_{2m}(X) = (-1)^m c_{2m}(X) = \det\left(-\frac{1}{2\pi}X\right) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}}(\xi_1\cdots\xi_m)^2.$$

二式を比べて

$$e(E)^2 = (-1)^m c_{2m}(E \otimes \boldsymbol{C}) = p_m(E)\,.$$

第 5 章

問題 4.1 G が可換ならば $Ad\,G$ は恒等変換しか含まないから，$P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ は直積束 $M \times \mathfrak{g}$ で，$P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に対する共変外微分 D は通常の外微分と一致する．したがって Bianchi の恒等式 $D\Omega = 0$ は $d\Omega = 0$ に他ならない $\left(d\omega = -\dfrac{1}{2}[\omega, \omega] + \Omega = \Omega\right.$ からも明白$\left.\right)$．また，Yang–Mills の方程式 $D^* \Omega = 0$ は (4.18) によれば $*d*\Omega = 0$ と同値であるから，Ω が Yang–Mills の方程式を満たすための条件は Ω が調和形式であることに他ならない．あとは，調和形式に関する Hodge の定理の結果である．

第 6 章

問題 1.1 $q \in Sp(1)$ とすれば $q^{-1} = \bar{q}$ であることに注意しておく．純虚の四元数全体のつくる 3 次元ベクトル空間を V とする．

$$V = \{p \in \boldsymbol{H}\,;\, \bar{p} = -p\}\,.$$

各 $q \in Sp(1)$ は V の直交変換

$$p \in V \longrightarrow qpq^{-1} \in V$$

を引きおこす．この準同型写像 $Sp(1) \to SO(3)$ が同型写像 $Sp(1)/\{\pm 1\} \to SO(3)$ を引きおこすことは容易に確かめられる．

問題 2.1 式 (2.6) の S_{ijkl} は $s \in \boldsymbol{R}$ だけできまるから，$\dim \mathscr{R}_1 = 1$．$\mathscr{B} = S^2V^*$ の次元は $\dfrac{1}{2}n(n+1)$．$\mathscr{R}_0$ は $\sum K_{ii} = 0$ となる $(K_{ij}) \in \mathscr{B}$ の元の全体であるから，$\dim \mathscr{R}_0 = \dfrac{1}{2}n(n+1) - 1 = \dfrac{1}{2}(n-1)(n+2)$．次に $\mathscr{R}$ の次元を計算するには，$\dim \wedge^2 V \otimes \wedge^2 V = \dfrac{1}{2^2}n^2(n-1)^2$ から Bianchi の恒等式の数 $n\dbinom{n}{3}$ を引けばよい．したがって

$$\dim \mathscr{R} = \frac{1}{2^2\cdot 3} n^2(n-1)(n+1)\,,$$

$$\dim \mathscr{R}_W = \dim \mathscr{R} - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2^2\cdot 3} n(n+1)(n+2)(n-3)\,.$$

問題 2.2 $*\circ K(\theta^k \wedge \theta^l) = -K\circ *(\theta^k \wedge \theta^l)$ を証明するのだが番号の付け方だけのことだから $k=1,\ l=2$ として差支えない.

$$\begin{aligned} *\circ K(\theta^1 \wedge \theta^2) &= *\sum (K_{i1}\theta^i \wedge \theta^2 + K_{i2}\theta^1 \wedge \theta^i) \\ &= (K_{11}+K_{22})\theta^3 \wedge \theta^4 - K_{31}\theta^1 \wedge \theta^4 + K_{41}\theta^1 \wedge \theta^3 - K_{32}\theta^2 \wedge \theta^4 \\ &\qquad + K_{42}\theta^2 \wedge \theta^3\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K\circ *(\theta^1 \wedge \theta^2) &= K(\theta^3 \wedge \theta^4) = \sum (K_{i3}\theta^i \wedge \theta^4 + K_{i4}\theta^3 \wedge \theta^i) \\ &= (K_{33}+K_{44})\theta^3 \wedge \theta^4 + K_{13}\theta^1 \wedge \theta^4 + K_{14}\theta^3 \wedge \theta^1 + K_{23}\theta^2 \wedge \theta^4 \\ &\qquad + K_{24}\theta^3 \wedge \theta^2\,. \end{aligned}$$

問題 2.3 前問と同様. $*\circ W(\theta^1 \wedge \theta^2) = W\circ *(\theta^1 \wedge \theta^2)$ を証明すればよい.

$$\begin{aligned} *\circ W(\theta^1 \wedge \theta^2) &= *(\sum W_{ij12}\theta^i \wedge \theta^j) \\ &= W_{1212}\theta^3 \wedge \theta^4 - W_{1312}\theta^2 \wedge \theta^4 + W_{1412}\theta^2 \wedge \theta^3 + W_{2312}\theta^1 \wedge \theta^4 \\ &\qquad - W_{2412}\theta^1 \wedge \theta^3 + W_{3412}\theta^1 \wedge \theta^2\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W\circ *(\theta^1 \wedge \theta^2) &= W(\theta^3 \wedge \theta^4) = \sum W_{ij34}\theta^i \wedge \theta^j \\ &= W_{1234}\theta^1 \wedge \theta^2 + W_{1334}\theta^1 \wedge \theta^3 + W_{1434}\theta^1 \wedge \theta^4 + W_{2334}\theta^2 \wedge \theta^3 \\ &\qquad + W_{2434}\theta^2 \wedge \theta^4 + W_{3434}\theta^3 \wedge \theta^4\,. \end{aligned}$$

二式を比べ $\mathscr{R}$ の元の満たす恒等式と (2.10) を使えば $*\circ W(\theta^1 \wedge \theta^2) = W\circ *(\theta^1 \wedge \theta^2)$ を得る.

問題 2.4 式 (2.2) から, $R_{jl} - \frac{\sigma}{n}\delta_{jl} = 0$ ならば $K_{ijkl} = 0$ は明らか. $\sum_i K_{ijik} = R_{jl} - \frac{\sigma}{n}\delta_{jl}$ だから, 逆に $K_{ijkl} = 0$ ならば $R_{jl} - \frac{\sigma}{n}\delta_{jl} = 0$.

問題 3.1 $c(P,\beta) > 0$ ならば式 (3.12) により $R_+ = 0$ ではありえない. 同様に $c(P,\beta) < 0$ ならば式 (3.11) により $R_- = 0$ は不可能.

問題 3.2 $c(P,\beta) = 0,\ R_- = 0$ ならば式 (3.11) により $J(\omega) = 0$. 式 (3.12) により $R_+ = 0$. したがって $R = 0$. $c(P,\beta)$, $R_+ = 0$ の場合も同様にして (式 (3.11) と (3.12) の役割を入れかえ) $R = 0$ を得る.

参　考　書

この本を書くにあたって参考にした本を挙げるにとどめる．関連した論文については，これらの本の文献表を参考にされたい．

邦書

［松島］　松島与三：多様体入門，数学選書 5，裳華房，1965

［村上］　村上信吾：多様体，共立数学講座 19，共立出版，1969

［服部］　服部晶夫：多様体，岩波全書，岩波書店，1976

［野水］　野水克己：現代微分幾何入門，基礎数学選書 25，裳華房，1981

［丹野］　丹野修吉：多様体の微分幾何学，実教出版，1976

［茂木・伊藤］　茂木勇，伊藤光弘：微分幾何学とゲージ理論，共立出版，1986

洋書

［A］　M. F. Atiyah：Geometry of Yang-Mills Fields (Fermi Lectures), Accad. Naz. Lincei, Scuola Norm. Sup., Pisa, 1979

［E］　L. P. Eisenhart：Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press, 1949

［F-U］　D. Freed and K. Uhlenbeck：Instantons and Four-manifolds, MSRI Publ. 1, Springer, 1984

［K］　S. Kobayashi：Transformation Groups in Differential Geometry, Ergebnisse Math. 70, Springer, 1970

［K-N］　S. Kobayashi and K. Nomizu：Foundations of Differential Geometry, vol. 1 (1963), vol. 2 (1969), John Wiley & Sons

［L］　H. B. Lawson：The Quantitative Theory of Foliations, CBMS Series in Math. 27, Amer. Math. Soc., 1977

[M-S] J. W. Milnor and J. D. Stasheff : Characteristic Classes, Ann. Math. Studies 76, Princeton Univ. Press, 1974

[S] P. Shanahan : The Atiyah-Singer Index Theorem, Lecture Notes in Math. 638, Springer, 1978

[W] F. Warner : Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott Foresman, 1970

索　　引

ア

Einstein（アインシュタイン）計量　—— metric　201,207

Atiyah-Singer（アチヤ・シンガー）の指数公式　—— Index Theorem　212,214

アフィン接続　affine connection　76

イ

1助変数(局所)変換群　1-parameter group of (local) transformations　27,28

1の分割　partition of 1　8

インスタントン　instanton　204

——数　—— number　205

ウ　エ　オ

Van der Waerden-Bortolotti(ヴァン デア ヴェルデン・ボロルトロッチ)の接続 —— connection　97

Hermite(エルミート)内積　Hermitian inner product　131

Euler (オイラー)

——微分形式　—— form　157

——類　—— class　157,159

カ

Gauss (ガウス)

——写像　—— map　7

——の球面表示　——' spherical representation　7

——の方程式　equation of ——　99,103

外積　exterior product　9

外微分作用素　exterior differentiation　10

完全(微分形式)　exact form　19

(完全)積分可能　completely integrable　65,163

完備な(ベクトル場)　complete　(vector field)　28

——(接続)　——(connection)　89

キ

軌道　orbit　27

基本ベクトル場　fundamental vector field　55

境界をもつ多様体　manifold with boundary　14

共形　conformal　112

——曲率テンソル　—— curvature tensor　115,152,198,200

——的に平坦　conformally flat　116

共変外微分　covariant exterior differentiation　43,70,86

共変次数　covariant degree　28

共変接空間　cotangent space　2

共変接ベクトル束　cotangent bundle　3

共変微分　covariant differentiation, derivative　37,84

局所標構場　local frame field　38

極大積分多様体　maximal integral manifold　164

曲率 curvature 43,61,63,67,82
——形式 —— form 44,61,63,67,82

ク ケ

Christoffel (クリストフェル)の記号
——'s symbols 80,111
Green(グリーン)の作用素 ——'s operator 127
倉西写像 Kuranishi map 218
ゲージ変換(群) (group of) gauge transformations 173〜175

コ

Codazzi (コダッチ)の方程式 equation of —— 100,103
構造群 structure group 51
構造方程式(接続の) structure equation 44,63,77,82,107
——(群の) 59
コホモロジー環 cohomology ring 21
コンパクト台の de Rham コホモロジー
—— cohomology with compact support 26

サ

Simons (サイモンズ)の定理 ——'s Theorem 191

シ

4 元数 quaternion 197,225
——射影空間 —— projective space 225
自己双対(的) self-dual 194,200,202
自己双対接続のモジュライ空間 moduli space of self-dual connections 208
指数 index 212
指数写像 exponential map 88
次数(写像の) degree 16
弱安定 weakly stable 187
縮約 contraction 30
主G束 principal G-bundle 52
主ファイバー束 principal fiber bundle 50,51
商ベクトル束 quotient vector bundle 5

ス

垂直 vertical 81
——部分空間 —— subspace 65
随伴作用素 adjoint operator 123
随伴表現 adjoint representation 62
水平 horizontal 73
——接分布 —— distribution 165
——部分空間 —— subspace 65
スカラー曲率 scalar curvature 110
スライス slice 219,222

セ

正規座標系 normal coordinate system 89
正規直交標構束 bundle of orthonormal frames 93
正則ベクトル束 holomorphic vector bundle 130
成分(テンソルの) component 29
積分可能な接分布 integrable distribution 65,163
積分多様体 integral manifold 164
接空間 tangent space 2
接続 connection 37
——形式 —— form 38,61,77,81
絶対平行性 absolute parallelism 82
切断 section 4
接分布 distribution 163
接ベクトル束 tangent bundle 3

接ベクトル場　(tangent) vector field　4
ゼロ切断　zero section　4
線形標構(束)　(bundle of) linear frames　80

ソ

双曲空間　hyperbolic space　120
双対境界作用素　coboundary operator　21
双対鎖　cochain　21
測地線　geodesic　88

タ

第一基本形式　first fundamental form　95
第一構造方程式　first structure equation　107
体積要素　volume element　121
第二基本形式　second fundamental form　96
第二構造方程式　second structure equation　107
タイプ(テンソルの)　type　28
単純推移的　simply transitive　51
単体　simplex　21
断面曲率　sectional curvature　109

チ

Čech(チェック)コホモロジー　—— cohomology　21
Chern(チャーン)
——形式　—— form　138, 158
——指標　—— character　147
——類　—— class　138, 143, 158
調和形式　harmonic form　124
調和射影　harmonic projection　126
直積束　product bundle　3
直和　disjoint union　3

テ

定曲率　constant curvature　117
テンソル束　tensor bundle　28

ト

Todd(トッド)類　—— class　214
de Rham(ド・ラム)コホモロジー(群)　—— cohomology (group)　20
同伴する(束)　associated (bundle)　53
特性形式　characteristic form　158
特性類　characteristic class　158
——環　characteristic ring　162
閉じている(微分形式)　closed (form)　19

ナ　ニ　ネ

内積　inner product　32
Newton (ニュートン)の公式　——'s formula　148
ねじれ率(テンソル)　torsion tensor　76

ハ

葉　leaf　164
反インスタントン　anti-instanton　204, 228
反自己双対(的)　anti-self-dual　194, 200, 202
反変次数　contravariant degree　28

ヒ

Bianchi (ビアンキ)
——の恒等式　——'s identity　45, 78, 83, 87, 108, 110
——の第一恒等式　——'s first identity　78, 83, 87, 108

——の第二恒等式 ——'s second identity 78,83,87,110
引きおこされた接続 induced connection 41
引き戻し pull-back 11
歪対称 skew-symmetric 8
微分形式 differential form 4,8

フ

Pfaffian(プファッヒャン) 155
Frobenius(フロベニウス)の定理 ——' Theorem 163
ファイバー fiber 2,52
複素直線束 complex line bundle 143
複素ベクトル束 complex vector bundle 130
符号数 signature 212
部分ベクトル束 vector subbundle 5
普遍ファイバー束 universal bundle 161
分類空間 classifying space 161

ヘ

Belavin - Polyakov - Schwartz - Tyupkin(ベラヴィン・ポリヤコフ・シュヴァルツ・ティュプキン)の反インスタントン anti-instanton of —— 228
平行 parallel 47,71
——移動 —— displacement 72,73
——性をもつ parallelisable 82
閉微分形式 closed form 19
ベクトル束 vector bundle 2
変換関数 transition function 3,52

ホ

Poincaré (ポアンカレ)の相対定理 —— duality 128
Hodge(ホッジ)の＊作用素 ——'s ＊ operator 121
Bott(ボット)の消滅定理 ——'s Vanishing Theorem 166
Pontrjagin(ポントルヤーギン)
——形式 —— form 150,158
——指標 —— character 151
——類 —— class 151,158
法空間 normal space 92
包合的 involutive 163
法(ベクトル)束 normal (vector) bundle 7,92
ホロノミー群 holonomy group 72,73
ホロノミー部分束 holonomy subbundle 74

ミ ム モ

右移動 right translation 52
向き orientation 13
無限小変換 infinitesimal transformation 27
Maurer - Cartan(モーラ・カルタン)の微分形式 —— form 58
モジュライ空間 moduli space 208

ヤ

Yang - Mills(ヤング・ミルズ)
——接続 —— connection 184
——の汎関数 —— functional 183
——の方程式 —— equation 184
——不安定 —— unstable 191

ユ ヨ

誘導されたベクトル束 induced bundle 7
誘導された接続 induced connection 41
葉層構造 foliation 164

ラ　リ

ラプラシアン　Laplacian　124
Lie(リー)微分　—— derivative　30
Ricci(リッチ)
——曲率　—— curvature　110
——テンソル　—— tensor　110
——の恒等式　—— identity　43,79,87
——の方程式　equation of ——　100,103
リーマン計量　Riemannian metric　47,95,104
リーマン多様体　Riemannian manifold　47

レ

Levi - Civita(レヴィ・チヴィタ)接続
—— connection　96
捩率　torsion (tensor)　76
——形式　—— form　107

ワ

Weyl(ワイル)
——群　—— group　159
——の共形曲率テンソル　——'s conformal curvature tensor　115,152,198,200

著者略歴

1932年 山梨県出身．東京大学理学部数学科卒業．パリとストラスブルグに留学（仏政府招聘），ワシントン大学大学院で研究．1956年 Ph. D. プリンストン高級研究所所員（1956～58），MIT 研究員（1958～59），ブリテッシュ・コロンビア大学助教授（1960～62），1962年よりカリフォルニア大学の助教授，副教授を経て，現在同大学教授．（数学科主任（1978～81））

Sloan Fellow (1964.7～1966.6)，Guggenheim Fellow (1977.7～1978.6)，Fellow of the Japan Society for Promotion of Sciences (1981.9～1981.12)．1987年 幾何学賞受賞．

主な著書： Foundations of Differential Geometry, vol I (1963)，vol II (1969)（野水克己氏と共著）(John Wiley & Sons)，Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings (1970)（Marcel Dekker)，Transformation Groups in Differential Geometry (1972)（Springer)，曲線と曲面の微分幾何（1977）（裳華房），Differential Geometry of Complex Vector Bundles (1987)（Iwanami / Princeton Univ. Press)

接続の微分幾何とゲージ理論

定価 3296 円
（本体 3200 円）

1989年5月10日　第1版 印 刷
1989年5月15日　第1版 発 行©
1989年6月20日　第2版 発 行

著作者の了解により検印を省略いたします

著 作 者　小林昭七（こばやし しょうしち）

発 行 者　吉野達治

発 行 所　東京都千代田区四番町8番地
電 話 東 京 262－9166～9
株式会社 裳華房

印 刷 所　横山印刷株式会社

製 本 所　板倉製本印刷株式会社

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN 4 - 7853 - 1058 - 8

Printed in Japan